This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

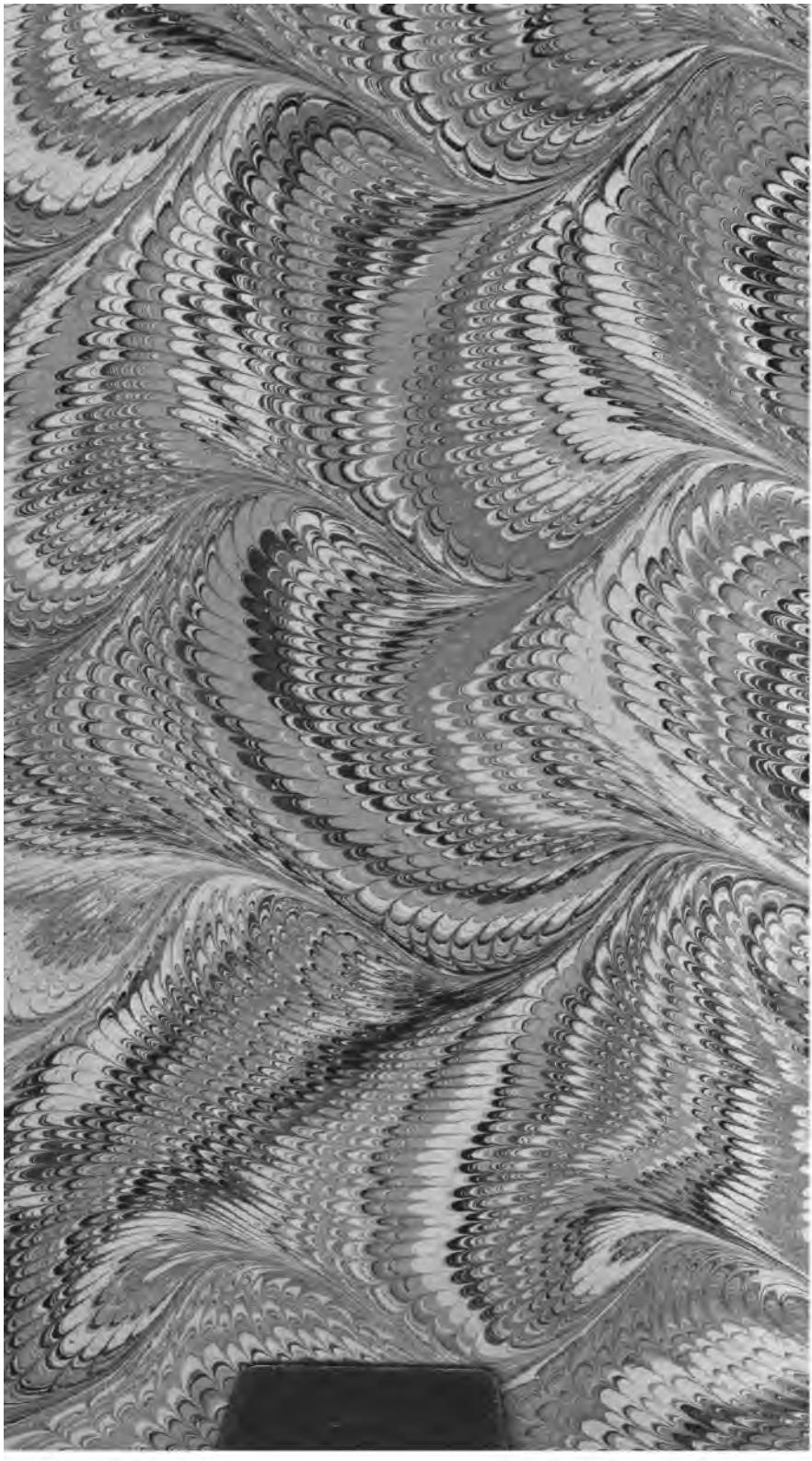
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

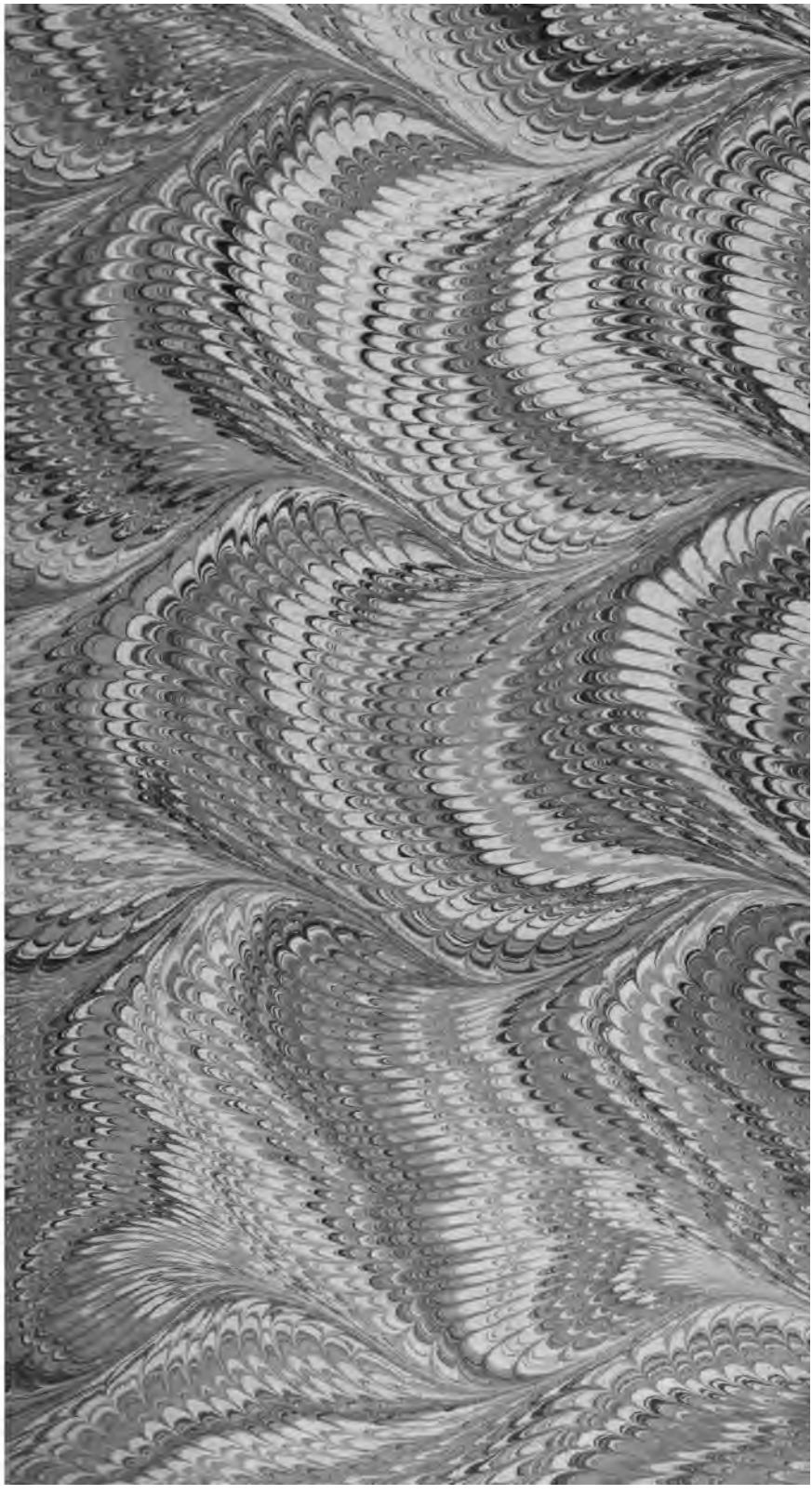
+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

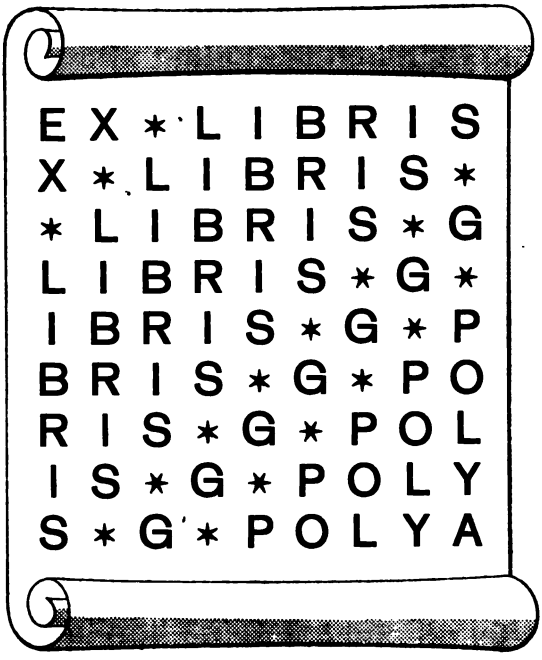
À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

QA331
D814
1887
MATH






E X * L I B R I S
X * L I B R I S *
* L I B R I S * G
L I B R I S * G *
I B R I S * G * P
B R I S * G * P O
R I S * G * P O L
I S * G * P O L Y
S * G * P O L Y A

R. L. Green
Jan. 21, 1895

THÉORIE GÉNÉRALE
DES FONCTIONS

PREMIÈRE PARTIE

THÉORIE GÉNÉRALE

DES FONCTIONS

DE

PAUL DU BOIS-REYMOND

TRADUIT DE L'ALLEMAND

PAR

G. MILHAUD

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE DU HAVRE

ET

A. GIROT

PROFESSEUR AGRÉGÉ D'ALLEMAND AU LYCÉE DU HAVRE

PREMIÈRE PARTIE

Métaphysique et Théorie des Concepts mathématiques fondamentaux : Grandeur, Limite, Argument et Fonction

NICE

IMPRIMERIE NIÇOISE, DESCENTE CROTTI, 8

1887

Quand MM. Milhaud et Girot m'ont fait part de leur intention de traduire ma *Théorie Générale des Fonctions* qui, publiée en 1882, avait même été rédigée environ cinq ans auparavant, j'ai voulu profiter d'une aussi belle occasion pour remanier quelques passages, pour insister sur plusieurs points qui ont acquis aujourd'hui plus d'actualité, enfin, pour faire quelques additions. Ces changements ne touchent d'ailleurs nullement au fond des matières exposées dans mon livre. Au contraire, les critiques assez nombreuses qui en ont paru, plus souvent encore contradictoires entre elles qu'en opposition avec mes vues, m'ont convaincu plus que jamais que j'ai réussi à mettre au jour la vraie nature de la connaissance exacte et des concepts métaphysiques sur lesquels elle se fonde.

PAUL DU BOIS-REYMOND.

Berlin, 15 Mai 1887.

AKD 18.4

Le souci trop exclusif de la rigueur donne à l'enseignement des mathématiques une forme souvent dogmatique. Ceux qui ont reçu cet enseignement dans les lycées ou les facultés sont longtemps sans comprendre qu'il puisse y avoir, à propos de ces sciences, des questions capables de diviser les penseurs, et toute discussion philosophique sur les notions essentielles des mathématiques est souvent mal accueillie par la simple raison qu'on en sent difficilement la nécessité.

Or, voici précisément un livre, écrit par un éminent géomètre de Berlin, rempli de discussions savantes sur les concepts fondamentaux de grandeur, limite, fonction. Que la manière de voir de l'auteur soit juste ou inexacte, peu importe : il met en question des problèmes philosophiques du plus haut intérêt touchant ainsi à ce que les mathématiciens considèrent trop d'ordinaire comme une arche sainte : Voilà pourquoi, il nous a paru utile d'en publier une traduction.

Nous n'entrerons pas dans les débats que soulève ce livre. Nous voulons seulement, pour préparer à sa lecture ceux qui ont puisé leur instruction mathématique dans des traités ou cours spéciaux, faire comprendre à grands traits comment les mathématiques peuvent donner lieu à des discussions intéressantes sur l'origine et la formation de leurs concepts. Nous ferons voir pour cela que l'enchaînement rigoureux des déductions auquel tend l'enseignement est, en réalité, postérieur au développement normal de ces sciences et qu'il n'atteint cet idéal de rigueur que pour devenir de plus en plus formel et, par cela même, de plus en plus subjectif.

Quand on ouvre un traité de mathématiques, on est frappé de l'importance du rôle que jouent les définitions. Chacune d'elles sert de base à un développement plus ou moins long formant tout un chapitre nouveau. Ce sont, pour ainsi dire, les éléments vitaux des mathématiques : la puissance de déduction de l'esprit semblait épuisée sur les premiers objets de ses études ; une définition survient et apporte un nouvel aliment à son activité. C'est ainsi que les définitions semblent

chaque fois assurer une prolongation de vie aux mathématiques de manière à en reculer les bornes à l'infini. — Or que renferme une définition ? — A quelle condition est-elle acceptable ?

Une définition a pour objet de construire une chose ou un fait à l'aide de certaines propriétés reliant l'élément nouveau à ceux déjà connus ; et la seule condition imposée à ces propriétés paraît être qu'elles ne présentent entre elles aucune contradiction logique. C'est le seul point sur lequel on juge utile d'insister, quand, en mathématiques, on sent le besoin de *justifier* une définition. Mais alors la première impression que donne la lecture d'un traité spécial est des plus étranges. Il semble que l'esprit puisse se donner libre carrière : n'a-t-il pas, pour créer ses définitions, un champ sans limites ? — et non seulement on sent bien que la science mathématique ne saurait avoir de bornes, mais encore on se demande s'il ne pourrait exister une infinité de mathématiques distinctes de celles qui sont enseignées, si enfin celles-ci ne sont pas dues à un caprice de l'intelligence humaine qui se serait plu à suivre une voie parmi tant d'autres également accessibles ? — En géométrie, passe encore ! On se sent vaguement guidé par des corps, par des formes, semblables à ce que nous montre le monde extérieur, mais que dire de l'analyse, maintenant surtout que, grâce aux travaux de reconstruction des Lagrange, Cauchy, Abel, etc.... il est facile de parvenir aux notions les plus élevées sans faire intervenir d'autre donnée expérimentale que le nombre. (*)

Pour se rassurer et voir disparaître le caractère capricieux et arbitraire des mathématiques il faut remonter à la genèse des notions qu'elles étudient et regarder un peu par-dessous cet arrangement parfait qu'on nous présente aujourd'hui.

On distingue ordinairement les mathématiques pures et les mathématiques appliquées, les premières étant la géométrie et l'analyse, les autres étant des applications de celles-là. C'est mal indiquer qu'une seule question de degré justifie cette distinction. La géométrie et l'analyse sont les premières et les plus simples applications de la *mathématique*, c'est-à-dire de ces suites spéciales de déductions, de ces méthodes logiques particulières qui appartiennent à toutes les sciences mathématiques, abstration faite de leurs objets. On sait d'abord que les données premières de la géométrie et de l'analyse sont puisées dans le monde extérieur. La géométrie lui emprunte l'étendue,

---

(*) Voir l'Introduction à l'étude des fonctions d'une variable de M. J. Tannery.

le point, la ligne droite, avec toutes leurs propriétés intuitives. L'analyse est fondée sur le nombre, dont l'idée nous est fournie par l'expérience, et sur ses propriétés. Ce sont là des vérités naïves sur lesquelles il est inutile d'insister. Mais les points de départ ainsi fixés, l'indétermination du chemin à suivre n'en subsisterait pas moins, si la géométrie ou l'analyse ne se laissaient guider par des données extérieures, et c'est précisément, en dépit des apparences, ce qu'elles font sans cesse. Nous ne voulons pas parler ici seulement du postulat d'Euclide qui, loin d'être un axiome logique, est nettement déjà l'affirmation d'un fait expérimental. On peut le joindre aux données initiales. Celles-ci sont si complexes qu'il importe peu de penser ou non que ce fait nouveau est impliqué dans les notions intuitives sur lesquelles est fondée la géométrie. D'ailleurs, il n'y a eu d'arrangement d'aucune espèce dissimulant le fait tout nu, et il y aurait peu d'intérêt à dénoncer cet emprunt à l'expérience.

Mais il y a plus : tous les éléments nouveaux qu'étudie la géométrie, angle, angle droit, cercle, longueur de circonférence, etc., ne sont suggérés que par le monde extérieur. Il en est de même en analyse du nombre fractionnaire, du nombre incommensurable, de la limite, etc. Les nombres imaginaires eux-mêmes sont apportés par l'expérience, quoique cela paraisse paradoxal. C'est qu'ici cette expérience s'est affinée, pour ainsi dire, et est devenue la constatation du résultat d'un calcul ou d'une transformation algébrique. Mais tout cela est loin d'être évident. Chaque fois qu'un nouvel objet d'étude est suggéré, les mathématiques se l'assimilent au point d'en dissimuler l'origine, on plutôt, à l'occasion de cet élément, elles construisent logiquement un être nouveau, elles le créent de toutes pièces, et si l'unique souci qui les guide paraît-être la non contradiction des propriétés dont elles l'affublent, et la possibilité de les exprimer à l'aide des éléments anciens, en réalité la préoccupation première a été que cette création logique correspondit exactement à l'objet concret. Cette préoccupation est peu visible, parce qu'elle importe peu à la rigueur des raisonnements ; mais, si on ne veut pas laisser aux mathématiques une beauté purement platonique, s'il faut qu'elles méritent leur titre de science, tous ces développements logiques sont destinés à être utilisés dans la connaissance générale du monde physique, et alors, pour la solution du problème le plus simple, on sera bien obligé d'admettre l'identité de l'objet extérieur et du concept purement logique : A cet instant précis se trouve dénoncée l'origine expérimentale de toute définition : Si on a pu la dissimuler, c'est à la seule condition d'y substituer, pour l'instant de l'application, une proposition indémontrable,

un véritable postulat, par lequel nous affirmons que nos théories logiques peuvent donner l'explication d'un fait objetif.

Quelques exemples simples aideront à éclaircir ces idées. Après l'étude de quelques propriétés des lignes droites considérées ensemble, la géométrie utilise ces propriétés à l'occasion d'un élément nouveau : le cercle. La définition qui lui sert, pour ainsi dire, de passe-port est la suivante : La circonférence de cercle est le lien géométrique d'un point situé à une distance donnée d'un point déterminé. Traduisez : Que par le point déterminé on mène une droite quelconque, qu'on prenne sur cette droite, à partir du point, une longueur égale à la distance donnée : l'extrémité de cette longueur est ce qu'on appelle un point de cercle. La possibilité de construire ainsi autant de points de cercle qu'on voudra, voilà tout ce que contient la notion de lieu géométrique qui entre dans cette définition. On déduit de celle-ci toutes sortes de propriétés ; par exemple, une droite qui a un point commun avec un cercle en a un second ; un diamètre partage le cercle en deux parties symétriques, en d'autres termes, à tout point de cercle on peut en faire correspondre un second symétrique par rapport à un diamètre quelconque, etc. — La considération des polygones inscrits, c'est-à-dire dont les sommets sont points de cercle, permet de définir la longueur de la circonférence, ce sera la limite des périmètres des polygones inscrits dont le nombre des côtés augmente indéfiniment.

Dans tout ce développement il n'entre en aucune façon l'idée de la forme du cercle, de ce rond parfait que nous tirons par abstration de ceux que fournit l'expérience. Ce rond est formé par un contour continu ; il divise le plan en deux parties, l'une qu'il limite et que nous disons intérieure et une autre extérieure : toutes notions absolument distinctes de la définition et des déductions géométriques. De même le concept purement logique de la longueur de la circonférence est essentiellement distinct de ce que par intuition nous entendons par la longueur d'un rond, le tour d'une roue, par exemple, ou la longueur d'un fil d'abord exactement appliqué sur la conférence de la roue, puis déroulé. C'est ainsi que là même où les mathématiques semblent être le plus voisines des objets concrets de l'intuition expérimentale, elles se développent parallèlement à ces objets, et sans jamais faire disparaître la dualité qu'offrent la donnée des sens, affinée même par l'abstraction, et la construction logique de l'esprit. Mais ici du moins ce parallélisme est assez parfait pour que nous sentions fort bien comment a procédé la géométrie. L'expérience a d'abord fourni non seulement la notion du cercle, mais une foule de ses propriétés; parmi celles-ci à une époque de beaucoup postérieure, le

géomètre a choisi celles qui, tout en ne s'exprimant qu'à l'aide de droites, de points, et de longueurs, lui paraissaient le mieux caractériser le cercle concret et il a construit avec elle la théorie du cercle. Mais qu'on demande seulement, par exemple, quel est le tour d'une roue dont on donne le rayon, comment résoudre le problème à l'aide de la géométrie, si on n'admet l'identité entre la limite des périmètres des polygones inscrits et le tour même de la roue ? L'arrangement par lequel on a chassé l'expérience est trahi à cet instant par un postulat, celui précisément qui, en réalité, avait conduit à la définition logique.

L'exemple précédent nous reportait à une époque reculée de l'histoire des mathématiques ; en voici un au contraire qui, bien qu'emprunté à l'arithmétique élémentaire, répond à des tendances actuelles. Au commencement du chapitre des fractions, en arithmétique, on accepte ordinairement un fait d'expérience : le partage de l'unité en parties égales. L'égalité de deux fractions ou la supériorité d'une fraction sur une autre s'expliquent par la considération de deux longueurs, par exemple, mesurées par les fractions. La donnée expérimentale qui rompt en arithmétique la chaîne des déductions n'a donc pas disparu. Mais cependant rien n'est plus aisé que de dissimuler ici l'origine du développement nouveau. Appelons fraction le symbole formel composé de deux nombres entiers écrits l'un au-dessus de l'autre $\left(\frac{a}{b}\right)$. Convenons de dire que deux fractions sont égales quand les termes de l'une sont des équimultiples de ceux de l'autre, définissons somme, différence, produit, quotient des fractions les résultats auxquels conduisait la considération des quantités concrètes, etc. Les définitions étant toujours conformes à ce qui résultait pour nous de la donnée expérimentale, rien ne sera changé à la suite du chapitre sur les fractions. Il est probable que tôt ou tard on exposera ainsi couramment ce chapitre. Mais qu'on trouve alors la solution $x = \frac{2}{3}$ au problème le plus simple, où l'inconnue est une longueur, il faudra bien admettre, pour l'interpréter, que $\frac{2}{3}$ représente deux fois le tiers de l'unité et, en somme, on rétablira ainsi tout ce qu'on aura paru supprimer.

Ces exemples suffiraient peut-être à montrer la marche des sciences mathématiques : elles se développent naturellement sous l'impulsion de l'expérience, mais cachent tôt ou tard sous des constructions logiques l'origine de leurs concepts. En voici

une dernière et intéressante confirmation tirée de l'analyse supérieure.

Supposons qu'à un instant quelconque de l'histoire des mathématiques, on sente le besoin d'utiliser une propriété nouvelle des quantités concrètes : il ne sera pas toujours facile de l'énoncer simplement, de l'expliquer, de la ramener à d'autres connues, de débrouiller les éléments complexes qu'elle implique. Il se peut cependant que des esprits élevés devinent comme par instinct qu'il s'agit là d'une notion féconde, et qu'un développement fondé sur elle réalisera un grand progrès dans la connaissance générale des choses. A priori, nous n'avons pas de peine à admettre l'existence de tout un long chapitre mathématique construit sur des notions qu'on n'explique pas : la géométrie et l'arithmétique n'ont-elles pas pour données initiales des concepts impossibles à définir? Si nous supposons enfin que les chercheurs appliqués aux idées nouvelles, frappés de l'intérêt des résultats, se soient avant tout préoccupés d'en enrichir la liste, la reconstruction logique des données expérimentales risquera fort de rester longtemps inachevée ; longtemps, la branche analytique qui aura ainsi poussé brusquement semblera ne point se rattacher au tronc primitif. C'est précisément là ce qui s'est passé pour l'analyse supérieure, pour cette partie de l'analyse qui traite des incommensurables, des limites, des séries et produits infinis, des infiniments petits, des différentielles, etc. Le fait expérimental qui en est le point de départ, et dont l'introduction dans l'analyse remonte à une époque impossible à fixer est la notion *du devenir de la quantité concrète*, du passage continu d'un état à un autre. Après avoir suggéré bien des travaux, cette notion parvint à sa dernière et complète consécration dans les méthodes qu'inaugurèrent Newton et Leibnitz. Mais l'exposé de ces méthodes est loin d'avoir toujours présenté l'enchaînement dont les traités nous donnent aujourd'hui le tranquille spectacle. Ce n'est que difficilement et au prix de longs efforts qu'a été définitivement arrêté chez nous, depuis Cauchy et Duhamel, l'exposé de l'analyse infinitésimale. Le problème de reconstruction logique qui devait en faire une suite rigoureuse des chapitres antérieurs est-il complètement résolu ? Nous allons faire voir qu'il ne l'est pas d'une façon absolue dans l'enseignement actuel, sauf à montrer ensuite comment un pur formalisme peut fournir cette solution.

L'exposé que présentent aujourd'hui les cours d'analyse et qui a pour point de départ la définition mathématique de la limite, réduit le fait expérimental que nous avons signalé à un simple postulat indémontrable, le principe des limites, qui

s'énonce ainsi : Si une quantité variable croît sans cesse, tout en restant inférieure à une quantité déterminée, elle a une limite.

Duhamel en donne la démonstration suivante : (*)

« Soit A la valeur au-dessous de laquelle est toujours la « variable, et B une de celles qu'elle prendra ; qu'on partage « l'intervalle de B à A en parties égales aussi petites que l'on « voudra : la variable pourra bien dépasser tous les points de « division, mais ne peut aller jusqu'à l'extrémité ; il pourra « aussi se faire qu'elle ne les dépasse pas tous, et alors il y en « aura un qui sera le dernier qu'elle dépasse ; elle restera « donc toujours comprise entre celui-ci et le suivant, c'est-à-« dire dans un intervalle aussi ressérré que l'on aura voulu et « dans lequel elle ira toujours en croissant. En subdivisant « cet intervalle en un nombre aussi grand qu'on voudra de « parties égales, on reconnaîtra de même que la grandeur ne « peut se trouver que dans un nouvel intervalle fixe entre B et « A, et d'une étendue aussi voisine de zéro qu'on le voudra. « Il existe donc une certaine valeur fixe entre B et A, dont la « variable s'approche indéfiniment ; elle a donc une limite. »

Le raisonnement est rigoureux jusqu'à la conclusion exclusivement : Quant à passer de ce que l'intervalle qui comprend la grandeur peut devenir aussi petite qu'on veut à l'existence de la limite, ce n'est pas moins difficile que d'admettre d'emblée la conclusion, sans démonstration aucune. Ainsi que le montre nettement M. Paul du Bois Reymond, la diminution de l'intervalle qui comprend la grandeur n'atténue pas la difficulté qu'il y a à concevoir la limite. Le raisonnement de Duhamel cache une illusion ; et cela est si vrai que souvent, au contraire, pour expliquer qu'une grandeur resserrée dans un intervalle de plus en plus petit a une limite, on se fonde sur ce que les valeurs qui la comprennent forment deux séries l'une croissante, l'autre décroissante, admettant chacune une limite d'après le principe en question, et il suffit ensuite de remarquer que les limites sont les mêmes.

M. Bertrand, à propos des séries à termes positifs, dit simplement : « Il est clair que si dans la somme $u_0 + u_1 + \ldots$ « $+ u_n$ on prend un nombre de termes toujours croissant, « les résultats obtenus iront en augmentant et s'ils ne peuvent « pas dépasser toute limite, ils approchent nécessairement

(*) Duhamel. — *Des méthodes dans les sciences du raisonnement.* 2me partie, page 413.

« autant qu'on veut du plus petit des nombres qu'il ne peuvent « pas dépasser. » C'est de la même manière que raisonne M. Briot. Mais qui ne sent que l'existence de ce minimum parmi les valeurs que ne peut dépasser la variable n'est rien moins que démontrée, et qu'en somme ce raisonnement se réduit à changer, sans l'expliquer, l'énonciation du fait intuitif.

Ces démonstrations et toutes celles qu'on peut rencontrer reviennent au fond aux deux que développe l'auteur de ce livre, montrant chaque fois l'illusion qu'elles dissimulent. D'autre part, si on rejette toute démonstration, acceptera-t-on le principe des limites au même titre qu'une proposition de ce genre : « La même chose ne peut pas être et ne pas être en même temps ? » Il est très clair, au contraire, que le principe des limites énonce un fait nouveau, une propriété particulière de la quantité concrète et continue. Le caractère d'évidence qu'il nous présente est dû à l'expérience seule. C'est bien un postulat que l'enseignement pose au début de l'analyse supérieure, réduisant ainsi à la vérité qu'il énonce comme à un minimum nécessaire la donnée qui lui sert de base. Est-il possible de dissimuler enfin ce postulat ? Il suffit, pour s'en convaincre, de lire l' « Introduction à l'étude des fonctions d'une variable », de M. J. Tannery. L'enchaînement rigoureux de définitions et déductions par lesquelles l'auteur nous conduit insensiblement du nombre entier à toutes les notions les plus élevées de l'analyse résout bien décidément le problème de reconstruction logique qui devait faire disparaître dans l'exposé formel des mathématiques toute lacune entre les chapitres anciens et les nouveaux. Pour comprendre par quel mécanisme simple il est possible d'atteindre ce résultat, qu'on se rappelle l'exemple des fractions déjà mentionné. A la condition de se résoudre à un pur formalisme, rien n'est plus aisé que d'appliquer ici une méthode identique. Nous sommes convaincus qu'une suite de valeurs croissantes mais ne croissant pas indéfiniment a une limite, quand sous ces valeurs nous avons en vue des états successifs d'une quantité concrète : laissons de côté cette dernière considération et créons, en vertu d'une définition, *la limite* de la suite des valeurs. Ce ne sera plus une chose concrète, vue par intuition sensible, ce sera un pur symbole. Nous *conviendrons* de dire qu'il est supérieur à toute valeur atteinte ou dépassée par la suite qui sert à le définir, — inférieur à toute valeur qu'elle n'atteint jamais ; — nous conviendrons des circonstances où deux symboles répondant à la définition nouvelle sont égaux, ainsi que des résultats d'opérations effectuées sur eux, et, grâce au souci constant de faire correspondre ces définitions ou conventions aux vérités qui résultent pour nous

de l'existence de la limite, rien ne sera changé dans la suite des déductions. Le principe des limites aura disparu de l'analyse en tant que proposition à établir — et,avec lui,la dernière trace de tout donnée expérimentale autre que la donnée initiale de l'arithmétique,le nombre. Mais,pour appliquer à ce dernier exemple les idées indiquées à grandes lignes dans cette préface, il est bien entendu que dès qu'on touchera à l'outil ainsi affiné pour résoudre le plus enfantin des problèmes, ayant trait à des longueurs, par exemple, la solution ne sera justifiée et interprêtée que grâce à l'opinion que les symboles correspondent à des réalités.

La tendance à éliminer toute donnée expérimentale autre que les données initiales est-elle une simple manie des mathématiciens ? — Manie dangereuse en ce cas, puisqu'elle a pour conséquence de donner à leur science une allure capricieuse et l'apparence d'un simple jeu d'esprit ? — Cette tendance répond au contraire à une haute nécessité philosophique. Les éléments de notre connaissance, qu'elle qu'en soit l'origine, expérimentale ou rationnelle, se combinent dans notre esprit de telle sorte que le degré et la nature de la certitude qu'ils comportent sont souvent fort difficiles à préciser. Or, la reconstruction logique des faits mathématiques a pour résultat de séparer nettement d'une part ce qui, en eux, présente le caractère de la certitude, sinon absolue, du moins la plus haute à laquelle nous puissions atteindre, et d'autre part ce qui n'est qu'une vérité d'induction. En d'autres termes, elle a pour effet de créer une mathématique idéale planant au-dessus de toute expérience : c'est celle que connaissent surtout les mathématiciens. Derrière leurs échafaudages logiques, ils sont bien réellement à l'abri de toute objection ; et c'est avec raison que l'évidence de leurs conclusions est prise pour le type de la plus complète qu'il y ait à nos yeux. Stuart Mill prétend que la certitude des vérités mathématiques est inductive. Cette thèse n'atteint que les vérités mathématiques *objectives*, pour ainsi dire,énoncées à l'occasion des êtres concrets que suggère l'expérience. Elle nous paraît en ce cas absolument juste, car elle revient à dénoncer l'éternel postulat qui se cache, pour reparaître au moment de l'application, derrière toute création du géomètre ou de l'analyste. Mais elle ne saurait porter sur les vérités logiques de cette mathématique idéale que nous venons de définir. Celle-ci semble, il est vrai, n'être point débarrassée des données initiales : si on y regarde de près, on voit cependant qu'elle n'affirme rien sur ces données elles-mêmes, et montre seulement quelles en sont les conséquences si on les accepte comme hypothèses. Enfin la confection de cette mathématique toute formelle nous donne néanmoins sur

les choses elles-mêmes une indication précieuse : elle nous apprend quel est le minimun de propriétés qu'il suffit de supposer dans ces choses pour justifier l'application des vérités logiques. Toutes les propriétés géométriques du cercle, par exemple, s'étendront aux ronds concrets, s'il en existe, dont tous les points sont à la même distance d'un centre. L'analyse supérieure s'appliquera aux quantités dont il existe des états correspondant à tous les symboles qu'elle a créés, etc. Et ainsi on apprend à connaître le minimum de propriétés caractéristiques par lesquelles un fait concret peut entrer dans l'engrenage des déductions de la mathématique pure.

Voilà d'où celle-ci tire sa raison d'être. Mais quel que soit l'intérêt qu'elle présente, nous croyons avoir suffisamment montré que, par son essence purement formelle, elle ne saurait donner la solution d'aucun problème de connaissance concrète. C'est pourquoi les traités de mathématiques, si rigoureux qu'ils soient, et précisément d'ailleurs en raison de leur rigueur extrême, ne pourront jamais rendre superflue l'étude des problèmes de la connaissance tels que ceux que traite ce livre.

Le Hâvre, ce 1er Avril 1887.

G. MILHAUD.

PRÉFACE

Le besoin de voir clair dans la nature intime des intégrales des équations aux différentielles partielles du second ordre me conduisit à l'étude des formules générales qui, comme celle de Fourier, servent à exprimer les fonctions arbitraires. Ces recherches m'obligèrent ensuite à considérer l'essence des fonctions indépendantes de toute hypothèse et celles de leurs intégrales. Sur ce point, je ne parvins et je ne pouvais parvenir à une intelligence parfaite, qu'en soumettant à l'épreuve de la critique de la connaissance les concepts analytiques fondamentaux de grandeur et de limite. Je veux maintenant, dans le travail dont ce livre contient la première partie, parcourir en sens inverse, mais en moins de temps, je l'espère, le chemin que j'ai suivi moi-même.

Il s'agit, en effet, d'un ensemble de théories qui méritent d'être bien solidement établies dans un exposé spécial et dont l'idée fondamentale devient évidente, dès qu'on porte sa pensée sur la répartition des sciences médicales. Des théories générales s'opposent ici à des théories spéciales, comme à l'anatomie spéciale, à la pathologie spéciale, etc., s'opposent les sciences générales de même nom. De même il paraîtrait à propos de distinguer dans l'analyse une théorie spéciale des fonctions et une théorie générale.

La première, en étudiant d'une manière très générale les fonctions de variables complexes, a pour but de représenter des fonctions de propriétés déterminées et d'étudier la nature de grandes classes de transcendantes, en particulier de celles qui ont des relations avec les fonctions algébriques.

La théorie *générale* des fonctions embrasse, à mon avis, tout ce qui se rattache a l'idée la plus générale de fonction : En tête je place la métaphysique des concepts de grandeur et de limite, comme servant de base à la théorie de l'argument, de la fonction, et de la condition commune de convergence et

de divergence des différentes opérations infinies. Ce sont là, soit dit en passant, les questions traitées dans la première partie de mon travail. Puis, on trouvera la théorie générale des séries, l'étude de l'intégrabilité et de la différentiabilité des fonctions et les propositions générales relatives à l'intégrale définie ; ensuite la théorie de l'expression de fonctions dites arbitraires à l'aide d'intégrales et de séries, mais en particulier les expressions de Fourier qui précisent davantage le concept de fonction, enfin différentes parties qui s'y rapportent dans la théorie des équations aux différentielles partielles du second ordre.

Ainsi, en peu de mots, ce que contient la théorie générale des fonctions, c'est la théorie des rapports de grandeurs et des opérations en général, c'est-à-dire sans qu'on ait essentiellement en vue la représentation de *dépendances* particulières.

Depuis que, pour la première fois en 1872, j'ai publié, sous un autre titre, il est vrai, une étude sur ce sujet, il a paru des ouvrages qui poursuivent le même but. Il pourra m'arriver de leur emprunter maintes choses de valeur, comme je fais pour Monsieur U. Dini, à qui j'emprunte des propositions importantes sur la non différentiabilité de certaines fonctions. On verra cependant que mon travail pour le plan comme pour le fond même du sujet est absolument original. Cela est vrai assurément en ce qui concerne cette 1re partie, mais aussi en ce qui concerne la suite, par exemple, le prochain fascicule dont le sujet est la théorie générale des séries, et où, en dehors de ce qu'on trouve déjà dans les traités, j'apporte plus d'un aperçu nouveau.

Comme je l'ai dit, cette première partie contient l'examen, au point de vue de la théorie de la connaissance, des concepts de grandeur et de limite et l'application des résultats de cette étude aux théories de l'argument et de la fonction. Le problème qui touche à la théorie de la connaissance, je crois l'avoir résolu ad-assem, et ce qui garantit entre autres choses la rigueur de la solution c'est qu'elle explique, de la façon la plus naturelle les paradoxes qui se sont montrés tout récemment dans l'analyse.

Le concept de la limite analytique, ou (car en définitive il ne s'agit que de cela) celui de la limite de la fraction décimale, naît de certaines successions de représentations, qui ont, comme je le montrerai dans une autre occasion, une signification bien plus large encore. Selon qu'on coupe, d'après certains principes, ces suites de représentations ou que l'on fait atteindre à la pensée leur terme idéal, il naît une double forme d'intuition dont on peut suivre la ligne de démarcation à travers toutes les spéculations de la théorie de la connaissance.

Les représentations, éléments simples de la pensée, et dont la succession accompagne et régit tout acte mental, étant les matériaux primitifs de toute étude qui porte sur la théorie de la connaissance, doivent être précédées, comme notre étude sur les concepts analytiques fondamentaux, d'une définition suffisante du mot « représentation » *(Vorstellung)*.

En effet le sens de ce mot, quoiqu'il soit d'un fréquent usage, ne paraît pas être établi avec la rigueur que demandent son importance fondamentale ainsi que la multitude et la variété immense des individus qu'il embrasse. Car il ne s'agit pas seulement des représentations visuelles, de celles de l'ouïe et des autres sens, mais aussi, par exemple, des représentations de douleur, de gaîté, de colère, de volonté, etc.. Bref, on peut dire que tout phénomène psychique, qu'on l'appelle perception, sensation, volition, est également une représentation, ou, pour parler plus exactement, fournit à l'esprit une représentation de lui-même. Or, comment préciser et délimiter ces concepts ? — Voici mon opinion :

Est une représentation toute aperception qui peut devenir un objet du souvenir, et sous la forme même quelle affecte, à l'instant où la mémoire la reçoit. Et je comprends naturellement aussi, dans la totalité des représentations, tout souvenir qui, par le travail de la pensée, s'offre à la conscience.

Ainsi se réunissent sous un même principe simple et bien défini les représentations qu'on peut nommer directes et qui sont les impressions immédiates de nos sens, devenues conscientes, et les représentions indirectes tirées du souvenir.

Tübingen, Février 1882.

Des concepts de grandeur et de limite

Remarques préliminaires et énonciation la plus simple du problème principal

Par concept de limite, on entend un certain mode de raisonnement en vertu duquel, de la nature d'une suite de valeurs susceptibles d'être mesurées ou observées on conclut à l'existence de valeurs qui échappent à toute perception et dont l'existence ne peut jamais se démontrer au sens ordinaire du mot. Malgré tout, d'ailleurs, nous sommes habitués à nous contenter sans sourciller de cette conclusion que nous appliquons constamment.

Cette façon de conclure à l'existence effective d'objets que ne peut atteindre aucune perception immédiate ou médiate, est, comme on sait, familière à certaines sciences, ou l'on fait appel à une manière commune à tous les hommes de concevoir par intuition et de sentir. Mais ne faut-il pas s'étonner qu'une forme de pensée, qui est à peine plus rigoureuse, doive servir à consolider les notions fondamentales les plus indispensables et les plus fécondes des mathématiques, c'est-à-dire, précisément d'une science qui plus que toutes les autres, se fait gloire de la rigueur la plus méticuleuse et la plus nette, et qui chaque jour se montre incontestablement plus digne de sa réputation ?

Quel mathématicien pourrait nier que (surtout dans l'idée qu'on s'en fait ordinairement) le concept de limite et ses proches parents, ceux de l'illimité, de l'infiniment grand, de l'infiniment petit, des irrationnelles, etc... manquent encore de solidité ! Le professeur, qu'il écrive ou qu'il parle, a coutume de parcourir à pas rapides cette périlleuse introduction à l'analyse, pour se promener d'autant plus aisément sur les chemins si commodes du calcul.

En vérité, on fait rarement fausse route, quand on cherche les choses les plus curieuses en dehors des chemins que suit la foule: Eh bien, nous nous proposons de parcourir précisément ce terrain qu'évitent les autres.

Comme c'était à présumer, nous reconnaîtrons bientôt que les difficultés inhérentes aux concepts que j'ai mentionnés plus haut ne sont pas de nature mathématique ; elles seraient sans cela aplanies depuis longtemps ! Elles ont bien plutôt leur origine dans les éléments simples de notre entendement, dans les représentations.

La solution de l'enigme, si je ne me suis pas trompé, est, que c'est et ce sera toujours une énigme ; seulement, cette énigme est, me semble-t-il, ramenée à son expression psychologique la plus simple. L'observation la plus tenace de notre pensée et de ses rapports avec la perception ne nous conduit pas au-delà de la constatation que voici : Il y a, pour l'esprit, deux manières tout-à-fait distinctes de saisir les choses, qui ont un droit égal à être prises pour l'intuition fondamentale de la science exacte, parce que aucune des deux n'apporte de résultats absurdes, du moins tant qu'il s'agit des mathématiques pures. Et lorsque, dans d'autres sciences, l'une de ces deux formes de pensée semble aboutir à des contradictions, la majorité des penseurs a préféré jusqu'à nos jours supporter cet inconvénient, plutôt que de renoncer à l'intuition correspondante du monde.

Toujours est-il fort surprenant, qu'alors que tout ce qui pouvait cacher la vérité a été éliminé et qu'on peut s'attendre a en contempler enfin l'image claire et nette, elle nous apparaît sous une double forme. Celui qui le premier a vu à travers un cristal transparent la double image de l'objet simple, n'a pu en faire témoins ses amis avec plus d'émotion que j'en ai moi-même à cet instant, où, arrivé au terme de l'examen le plus scrupuleux et le plus infatigable, je dois me résoudre à exposer au lecteur le double mode d'intuition des principes fondamentaux de notre science.

Ces deux modes de représentations, je les nomme, me rattachant en cela à des concepts familiers, Idéalisme et Empirisme. Pour les caractériser tous deux en peu de mots, l'Idéalisme croit à la vérité de certaines formes limites de nos idées exigées par notre entendement, mais qui sont en dehors de toute perception et de toute représentation sensible ; l'Empirisme est le système de complète abnégation, il n'admet comme existant ou comme correspondant à l'existence, que ce qui peut-être perçu ; il ne se confond ainsi en aucune façon avec le pyrrhonisme classique.

Nous avons indiqué dans le concept de limite le problème auquel reviennent nos recherches actuelles, il nous faut maintenant en montrer plus nettement l'objet.

En cherchant à donner à la question la forme la plus générale et la plus abstraite, au sens d'une règle de calcul qui se continue indéfiniment ou d'une opération dite infinie, nous apercevrons tout de suite aussi la forme la plus simple du raisonnement dont les formes variées qu'il affecte dans l'analyse n'ont pas toujours été jusqu'ici à l'abri du reproche du manque de rigueur. Et, dans cette forme simple, il faudra ensuite analyser cette conclusion jusqu'à complète satisfaction de notre soif de connaître, qui, de son côté, doit se calmer en présence d'une limite effective de notre *pouvoir* de connaître.

Des principes et méthodes de l'analyse où le concept de limite forme l'hypothèse essentielle

Nous désignerons par f (x) une suite de représentations liées à une autre suite de représentations x de telle manière que, à chaque représentation particulière, x, corresponde une représentation particulière f (x). A cette forme la plus générale du concept de fonction ou dépendance uniforme répond aussi la manière la plus générale d'arriver au concept mathématique de la limite : Il suffit d'imaginer, sous les représentations, des états comparables numériquement à d'autres de même espèce, de telle façon qu'on puisse substituer à ces représentations ou à ces états leurs mesures numériques, ce qu'on appelle leurs valeurs. x désigne alors une suite de grandeurs qu'on peut exprimer en nombres. Nous imaginons ensuite, pour expliquer le concept de limite, qu'elles augmentent jusqu'à dépasser finalement toute borne, à peu près comme le temps qui s'écoule depuis un instant déterminé jusqu'au présent qui recule indéfiniment. Il y a cependant une différence, c'est que l'accroissement de nos grandeurs n'a pas besoin de passer par tous les degrés, elles peuvent procéder par bonds, comme font les aiguilles sautantes de certaines horloges, ou passer par des suites de valeurs se succédant sans règle et d'une manière absolument quelconque. Si maintenant il existe une grandeur déterminée Y, dont, x croissant, f (x) s'approche indéfiniment, de telle façon qu'il existe toujours des valeurs suffisamment grandes de x, pour que à partir de ces valeurs la différence Y — f (x) devienne et reste ensuite plus petite que

n'importe quelle grandeur si petite qu'on l'imagine, Y s'appelle la limite de f (x) et on écrit :

$$Y = \lim f(x).$$

Ainsi, x croissant par des valeurs quelconques, 1 est la limite de $\frac{x-1}{x}$, et x prenant toutes les valeurs entières, 2 est la limite de $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots \frac{1}{2^x}$. Enfin, zéro est la limite de $\frac{\cos x}{x}$. Au contraire il n'y a pas de limite, par exemple, à la série des nombres entiers 1,2,3, ... pas de limite non plus, par conséquent, à la suite de tous les nombres x, quand ce symbole représente tout nombre entier ou fractionnaire. Les phénomènes périodiques, comme les révolutions sidérales, n'ont pas de limite, supposé que le mouvement des planètes reste dans l'avenir ce qu'il a été dans le passé. Le concept général de fonction comprend aussi : les opérations dites infinies ; par exemple, les séries et les produits infinis, les fractions continues, les intégrales, etc..... Dans les séries et les produits infinis, x désigne, comme dans l'exemple cité plus haut, le rang du dernier élément auquel on limite provisoirement l'opération.

Presque à chaque pas dans l'analyse on se trouve en face de cette question : Telle ou telle fonctiou f (x) a-t-elle ou non une limite, lorsque x ou bien tend vers une valeur déterminée ou bien croît indéfiniment ? L'analyse nous pose si souvent cette question que, pour la résoudre, il s'est amassé dans le cours des années un trésor extrêmement abondant de propositions, de règles et de théories, dont quelques unes nous sont si familières que nous les appliquons inconsciemment comme les règles du calcul élémentaire. Dans les opérations infinies, dont je viens de parler, on nomme critérium de convergence ou de divergence les règles qui décident de l'existence ou de la non existence d'une limite.

Mantenant, toutes les propositions, règles ou théories, semblent pouvoir être considérées comme transformations et raisonnements purement mathématiques, grâce auxquels dans le cas même le plus compliqué, apparaît toujours certain critérium extrêmement simple qui résoud immédiatement la question de l'existence d'une limite. Ce critérium est fourni par la proposition suivante qui certainement est très acceptable quand même on la laisserait sans démonstration :

Si la différence $f(x_1) - (fx)$ $(x_1 > x)$, *à partir d'une valeur suffisamment grande de* x_1 *et pour des valeurs arbitraires de la différence* $x_1 - x$, *reste au-dessous d'un nombre choisi aussi petit qu'on a voulu, la fonction* f (x) *a une valeur limite déter-*

minée. Mais si, pour n'importe quelle valeur de x, *si grande qu'elle soit, on trouve pour* $f(x_1)-f(x)$ *(toujours* $x_1 > x$*) des valeurs supérieures à un petit nombre quelconque mais indépendant de la variation de* x, f(x) *n'a pas de limite.*

Cette proposition n'est d'ailleurs qu'une extension de la règle générale pour la convergence des séries donnée par Cauchy : Pour que la série $u_1 + u_2 + \ldots$ soit convergente, il faut et il suffit que $u_m + u_{m+1} + \ldots u_n$ ait la limite zéro, quand *m* et *n* croissent indéfiniment.

Je nomme la proposition concernant f(x) le principe général de convergence et de divergence, parce qu'en effet je trouve que dans tous les raisonnements concluants, de moi connus, touchant la limite, on finit toujours par reconnaître que dans cette règle réside la force de la démonstration.

On peut affirmer que ce principe, de concert avec la définition de la limite d'après laquelle il faut concevoir une grandeur Y dont la différence avec f(x) tombe au-dessous de toute quantité quand on fait croître x, représente phychologiquement une grande partie du domaine mathématique, tout au moins la partie de ce domaine qui traite des difficultés inhérentes aux concepts. Dans ce sens, nous pouvons dire que notre recherche sur les concepts fondamentaux des mathématiques revient à la complète intelligence de ce principe.

Il comprend deux parties, l'une affirme l'existence d'une limite et l'autre l'exclut sous une condition déterminée. Le concept de limite est ainsi chaque fois supposé. En réalité, il s'agit avant tout de la première partie parce que des voies purement mathématiques conduisent de la première à la seconde. Maintenant, on peut démontrer la proposition, de même que la règle fondamentale de Cauchy, très facilement de plusieurs manières et certainement avec ce degré de rigueur dont peuvent se flatter les démonstrations d'autres principes connus. Mais si, dans de pareilles démonstrations on revient de plus en plus aux idées élémentaires dont elles sont formées, et qu'à chaque conclusion on se pemande à nouveau si elle est bien satisfaisante, on découvre alors dans chacune d elles au moins un point qui correspond à une lacune dans la suite de nos représentations, où sans transition quelque chose survient dont on ne cherche même jamais à démontrer l'existence. Ce quelque chose est la limite même. Si près de nous qu'elle soit placée, un abîme insondable nous en sépare toujours ; la continuité des représentations est interrompue quelque part. On atténue ce fait en disant : passer à la limite, pour exprimer le saut que l'on fait par dessus cet abîme, mais ce mot indique bien à quel point on a conscience d'une lacune. En effet, si on ne connaît pas déjà la limite d'une fraction,

comme dans nos exemples simples donnés plus haut, mais que, la condition posée par le principe général étant remplie, on affirme que la fonction doit avoir une limite, voici alors exactement le sens de ce qu'on affirme : Le symbole f(x) crée ou engendre une grandeur dont on ne savait rien jusqu'ici et qui, sans l'opération f(x), n'avait pas besoin non plus d'exister. Mais en quoi consiste une grandeur limite ainsi engendrée ? Comment doit-on la concevoir ?...

Si, par exemple la série, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{2.2.2} + \ldots$ a pour limite 2, c'est-à-dire un nombre, comme on peut l'établir facilement en faisant voir que ce nombre satisfait à la condition de la limite, c'est-à-dire que la différence $2 - (1 + \frac{1}{2} + \ldots \frac{1}{2^n})$ quand n croît indéfiniment, devient aussi petit qu'on veut, aucun homme n'a encore vu le nombre ou la fraction décimale ou une autre chose quelconque qui représente la limite de la suite $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \ldots$ Personne n'a vu le résultat numérique de l'extraction de la racine carrée de 2, supposée prolongée indéfiniment, résultat que nous désignons par $\sqrt{2}$ pour effectuer sur ce symbole toutes les opérations aussi naturellement, par exemple, que sur le nombre 2 lui-même. Si cependant on affirme que ces limites existent, ou bien cette affirmation est fausse, ou bien elle a besoin d'une explication qu'on cherche vainement dans les ouvrages de mathématiques spéciaux et à plus forte raison dans les écrits philosophiques qui s'y rapportent.

Toutefois, la formation de la limite par la variation absolument indéterminée d'une fonction f(x) (c'est ainsi que nous la supposons jusqu'ici) est évidemment comme f(x) elle-même un ensemble très vaste de représentations où nous nous efforcerons plus tard d'apporter de l'ordre dans le chapitre qui a trait au principe général de convergence et de divergence. Il y a un cas particulier du principe général, suivant lequel une fonction qui varie toujours dans le même sens (*) et qui n'aug-

(*) Expression abrégée pour désigner une fonction qui ne fait qu'augmenter ou que diminuer chaque fois qu'elle varie. Cela n'exclut pas qu'elle soit constante dans des intervalles entiers ou partout. C'est ce que Lejeune-Dirichlet voulait désigner en disant : la fonction ne diminue jamais ou n'augmente jamais. (Dove's Repert. Bd 1, Darstellung Willkührlicher Functionen durch Reihen). M. Neumann a proposé naguère d'appeler *monotones*, des fonctions soumises aux restrictions en question, et nous ferons aussi usage de ce terme, où cela paraîtra convenable.

mente ni ne diminue au-delà de toute limite, doit nécessairement avoir une limite déterminée. Il conviendrait déjà bien mieux, comme représentation plus simple, à la recherche de l'origine du concept de limite, et enfin il présente lui-même dans un cas tout spécial un mode de construction de la limite bien plus simple encore grâce auquel, comme je le montrai aussi dans le chapitre cité, la lacune que j'ai relevée dans la déduction des propositions générales se trouve diminuée. J'ai en vue l'expression habituelle de ce qu'on nomme les irrationnelles à l'aide de fractions décimales illimitées. Elle équivaut ainsi, pour nous, à l'expression la plus simple de tout ce qui dans l'analyse des opérations infinies apparaît encore en définitive comme non démontré.

Dès que l'origine de la limite de la fraction décimale n'aura plus d'obscurité pour nous, le charme sera rompu et l'analyse sera maîtresse chez elle. Elle gouvernera alors aussi aisément et sûrement dans l'immense variété des rapports de grandeurs, que l'a fait de tout temps la théorie des nombres entiers, dans son domaine plus étroit.

On le voit, les réflexions que suscite le mode de raisonnement fondé sur le concept de limite pourraient déjà être soulevées par les opérations arithmétiques les plus usuelles, comme le développement d'une fraction décimale illimitée. Seulement, dans les mathématiques élémentaires où les fractions décimales illimitées ne servent tout au plus qu'au calcul, qu'est ce qui aurait pu éveiller le soupçon que tout n'y est pas absolument net ? L'examen du problème de la limite qui va suivre a été bien plutôt amené par certaines combinaisons nouvelles et hardies qui prennent naissance quand on transporte aux variations des fonctions les différences infiniment petites du « continuum » des nombres, et c'est précisément dans ces combinaisons qu'ont paru surgir des difficultés de conception insurmontables.

En effet, Fourier qui, en donnant aux géomètres des exemples nombreux de discontinuité des fonctions, nous a mis sur la voie de la notion moderne de la fonction analytique, ne connaissait pourtant que des fonctions continues, comme celles que l'on avait étudiées jusqu'à lui, et ne présentant que dans des points isolés des interruptions de continuité, à savoir des changements brusques de valeur. Cette représentation trop restreinte des fonctions, comme devant, à l'exception de quelques points isolés, varier d'une manière continue à l'instar des fonctions algébriques et des transcendantes les plus simples, c'est Lejeune Dirichlet, que je sache, qui le premier en a fait sentir l'insuffisance. Mais ces idées préconçues sur la marche des fonctions n'ont disparu pour tout

de bon que devant les fonctions continues qui n'admettent pas de dérivées, et les fonctions toujours discontinues et pourtant intégrables fonctions qui ont été sauvées pour la science, du trésor d'idées qu'un des plus profonds et malheureusement des plus laconiques chercheurs de ce siècle a emporté dans son tombeau prématuré les unes, par des élèves dignes de son enseignement, les autres, par une circonstance heureuse.

Vue rapide sur la recherche qui va suivre

Une recherche aussi sérieuse que celle que nous allons faire sur la démonstration du concept de la limite, devrait raisonnablement se demander avant tout : En quoi consiste une démonstration mathématique ? Quel critérium la fera déclarer satisfaisante ou défectueuse ? Laissons pourtant de côté ces questions embrouillées. Je crois que pour juger la valeur d'une démonstration, on peut aujourd'hui s'en fier au sens logique, devenu depuis quelque temps beaucoup plus délicat, d'un mathématicien de profession. La définition scientifique de la démonstration mathématique, réussira peut-être un jour par une voie analogue à celle qu'a ouverte la logique du calcul de Boole, que M Schroeder, en la remaniant, nous a rendue plus accessible.

Il est pourtant bien évident que, pour démontrer ou concevoir, il faut relier à une représentation initiale déjà existante ou à un concept (c'est-à-dire à l'ensemble de qualités communes à une classe de représentations) une représentation finale, qui est précisément l'objet nouveau à démontrer ou à concevoir, et cela à l'aide d'une chaîne de représentations dont la génération successive et continue ne surprend jamais, jamais ne trouble la quiétude de notre conscience attentive. Pour concevoir, l'esprit remontera de la représentation nouvelle à la représentation initiale ; pour démontrer, il suivra le chemin inverse. En tout cas, notre étude qui porte sur les *valeurs numériques*, exige que nous mettions tout d'abord en pleine lumière la représentation première ou le concept initial, qui ne peut être que le concept de la grandeur d'une façon générale et tout particulièrement, pour parler avec plus de précision, de la grandeur mathématique considérée surtout dans son rapport avec le nombre.

Après avoir solidement établi le concept de grandeur mathématique nous pourrons attaquer notre problème principal, le concept de limite, ou tout simplement, la recherche de la limite d'une fraction décimale. Là, notre pensée devra, comme nous l'avons dit, suivre deux voies différentes. Nous

tâcherons de décrire deux modes d'intuition absolument opposés l'un à l'autre, dont aucun cependant ne saurait avoir notre préférence. Pour les développer aux yeux du lecteur tout-à-fait indépendamment l'un de l'autre avec leurs propositions inconciliables, j'ai adopté une forme particulière d'exposition.

Que le lecteur veuille bien se supposer par la pensée dans le cas suivant. Après que je me serais par occasion, entretenu avec deux savants amis sur les intuitions fondamentales de l'analyse, je les aurais priés de me communiquer leurs idées par lettre avec plus de détails, ce qu'ils m'auraient promis de faire de bonne grâce. Ensuite j'aurais, avec leur permission, soumis à chacun des deux les communications de l'autre, et j'aurais ainsi provoqué cet échange écrit d'opinions que je me permettrai de soumettre au lecteur, après avoir analysé le concept de grandeur. Je me suis efforcé de faire raisonner mes deux interlocuteurs avec la même rigueur, et il ne dépend donc pas de ma bonne volonté que le lecteur réussisse à montrer une faute de logique dans les raisonnements de l'Idéaliste ou de l'Empiriste. L'Idéaliste prendra le premier la parole.

L'idée, suivant laquelle deux modes d'intuition essentiellement distincts pour les concepts fondamentaux de l'analyse, sont non-seulement indiqués dans ce qui suit, mais réalisés méthodiquement, peut d'une manière générale s'entendre ainsi : à l'égard des limites, ou termes hypothétiques de nos suites de représentations qui ne sont graduées qu'en plus ou en moins, nous avons coutume de prendre position de différente manière suivant nos dispositions naturelles ou notre éducation ; aucune raison logique n'entrave la liberté de notre choix. Cette pensée semble d'ailleurs être aussi un excellent guide dans les principes fondamentaux d'autres domaines de la connaissance humaine, comme je me propose de le montrer sous peu dans un travail spécial.

Il en est de la limite du nombre décimal sur laquelle la foule ne voit ni ne veut accueillir l'ombre d'un doute, comme du fameux axiome d'Euclide.

A quels efforts ont dû s'astreindre les esprits les plus distingués pour démontrer chacune des vérités dont l'évidence apparaît spontanément à un garçon charpentier ! Mais le but et le bénéfice de ces recherches ne furent pas seulement une pure certitude géométrique, mais une intelligence plus profonde du mécanisme de la pensée humaine. Car, pour trouver l'origine de ces intuitions géométriques naturelles, il fallait analyser la représentation d'espace qu'a l'esprit humain et remonter jusqu'à la manière dont il l'a acquise.

La conclusion des considérations suivantes, qui doivent servir d'introduction à la théorie générale des fonctions, sera fournie par la théorie mathématique du concept de limite et du principe général de convergence. C'est seulement après une aussi longue traversée sur une mer philosophique, que nous foulerons pour la première fois avec cette question un terrain mathématique, et il ne nous arrivera plus désormais, — ce sera le résultat de notre étude sur les concepts — de sentir ce sol nous manquer sous les pieds.

CHAPITRE I

Des Grandeurs ou Quantités mathématiques

INTRODUCTION

Par grandeur ou quantité mathématique (quantum, quantitas, Grösse) on entend une qualité commune à des objets de différentes espèces, par rapport à laquelle ils sont comparables numériquement, comme leur longueur ou leur poids. Cependant toutes les suites de représentations qui peuvent être soumises aux opérations mathématiques sont loin d'être comprises dans cette définition. Généralement parlant, il faut entendre par grandeur ou quantité mathématique l'ensemble d'une suite de représentations soumises au moins aux conditions suivantes : 1° Chaque représentation isolée occupe dans cette suite une place suffisamment déterminée ; 2° Entre les grandeurs de la suite ou entre ces grandeurs et celles d'autres suites également ordonnées, il existe des rapports qui peuvent être combinés et donner naissance à de nouveaux rapports.

Seulement, hâtons-nous de le dire, avec ces définitions générales, que l'on formule de manière à ne laisser échapper aucun cas particulier, on n'avance guère. Car pour parvenir de là à une idée claire et précise du concept de la grandeur mathématique dans le sens ordinaire qui est, et qui restera la notion fondamentale de la géométrie, de la mécanique, et n'en doutons pas, aussi de l'analyse abstraite, il faudrait restreindre la définition générale, jusqu'à ce qu'elle s'adaptât au concept voulu. Cette manière de procéder que l'on trouve chez quelques auteurs a un défaut capital. C'est que, au fond, pour savoir où s'arrêter en restreignant la définition générale, il faut déjà être en possession du concept final. Aussi les résultats que l'on obtient de cette manière me paraissent-ils peu satisfaisants, assez vagues et même contradictoires selon qu'ils se fondent sur différentes idées préconçues.

Pour comprendre à fond les concepts puissants qui dominent toute la pensée comme ceux de l'espace et du temps et aussi des concepts moins vastes quoique encore très bien délimités, tels que celui qui nous occupe, il paraît plus naturel et même plus intéressant de procéder de la manière inverse, en essayant de remonter à l'origine du concept, d'examiner attentivement par quelles abstractions il peut s'être formé, de le poursuivre dans les différents domaines de la connaissance où il se manifeste, et d'établir enfin solidement les caractères communs de ces différentes manifestations. Ce n'est qu'ainsi qu'un concept à ramifications si riches et si délicates, comme celui de la grandeur mathématique, peut être finalement débarrassé de tout accessoire, ce qui doit être notre but. Car les grands concepts présentent en général deux états de développement bien distincts, dont le premier est commun à tous les hommes, et l'autre, de nature scientifique, tend à une détermination exacte du concept commun. Ceci peut être fort difficile, à la vérité, comme par exemple s'il s'agit du concept de matière organisée, ou de règne végétal ou animal : Quelque manifeste que soit la différence entre un lion et un pommier, la science n'a pas encore réussi à tracer la ligne de séparation entre le règne animal et le règne végétal.

Nous donnons dans cet ouvrage deux exemples de la méthode indiquée. Celui qui va suivre sur le concept de la grandeur, et plus loin l'examen du concept de la limite. Mais nous nous proposons de soumettre ailleurs à une analyse semblable d'autres concepts, à savoir ceux de l'espace et du temps et les concepts mécaniques de force, etc.

Quant à la présente recherche, nous serons assez vite conduits à une forme fondamentale du concept mathématique de grandeur qui domine non seulement le monde extérieur, mais aussi la vie intérieure de l'âme.

Les quantités mathématiques linéaires, c'est le nom que je donne à cette forme fondamentale, sont les propres racines de l'analyse, par lesquelles elle tire continuellement une nouvelle nourriture de sol natal, l'étude de la nature. Mais, d'un autre côté, nous saisirons plus nettement l'essence de grandeurs mathématiques d'une autre espèce si nous les comparons aux grandeurs linéaires, et si nous cherchons par quelles propriétés elles en diffèrent.

La grandeur mathématique peut, par sa nature, ne prendre que des valeurs discontinues, comme le nombre d'objets, *Anzahl*, ou bien elle correspond à une espèce de représentations passant d'une manière continue de l'une à l'autre, comme cela a lieu pour les longueurs. Ceci trace pour nous, il est vrai, une

ligne de séparation de chaque côté de laquelle nous porterons bientôt notre observation. Cette ligne pourtant, comme on le reconnaîtra bientôt, ne réalise pas à proprement parler une scission dans le concept de grandeur, parce que la quantité mathématique continue dont il s'agit essentiellement ne peut servir à *mesurer* qu'après l'introduction du concept de nombre, et parcequ'ainsi le concept de grandeur continue dans son développement scientifique suppose celui de grandeur discontinue.

1. — Quantités mathématiques discontinues. — Maintenant, pour en venir tout de suite aux quantités mathématiques discontinues, le concept de nombre d'objets (c'est à cette espèce de grandeurs discontinues que nous voulons ici borner nos considérations) a son origine dans la représentation de l'état isolé des objets de la perception ; et on s'explique sur ce concept à l'aide de mots ou de signes par lesquels on exprime le nombre d'objets et qui s'appellent les nombres.

Le concept du nombre d'objets est tout-à-fait indépendant de l'espèce des objets. Raphaël, un théorème, un canon, font ensemble *trois objets*. Le nombre d'objets est donc, pour ainsi dire, ce qui subsiste dans notre pensée, lorsque tout ce qui distinguait les choses s'évanouit, et qu'il n'y a plus dans l'esprit qu'une représentation, à savoir que les choses étaient distinctes ; il mesure combien de fois notre conscience a reçu une impression distincte. Il suit immédiatement de là que les objets séparés, lorsqu'ils sont identiques ou qu'ils ne diffèrent presque pas les uns des autres, éveillent immédiatement la représentation du nombre, car l'impression des différences n'a pas besoin de s'effacer, elle ne se forme même pas. Cela suppose pourtant que l'attention n'est pas absorbée par la configuration géométrique des objets, à plus forte raison qu'elle ne se porte pas de prime abord sur leur ordre.

2. — Eclaircissements sur la formation du concept. — Le mode de provenance, qui vient d'être indiqué, du concept du nombre d'objets, est commun à peu près à tous les concepts. Toutefois il semble à propos, au commencement d'une série de déterminations de concepts, de dire comment je me représente la formation du concept. Les concepts naissent là où des traits communs à un groupe de représentations éveillent et captivent notre attention. La variété de ces représentations s'efface ou, comme l'écrit Jean Müller, s'obscurcit devant notre conscience. Lorsqu'ensuite le concept, (c'est-à-dire l'ensemble de ces caractères communs), persiste dans notre pensée, il se fixe dans ses traits essentiels, dans nos représentations et notre souvenir, au mot ou au signe à l'aide duquel le langage ou la science le désigne. Si on veut remonter au contenu réel

du concept, on fait reapparaître devant la pensée une ou plusieurs des représentations particulières d'où étaient abstraits les caractères communs. Aussi peut-on observer sur soi-même que des concepts pour lesquels il n'existe encore ni mot ni signe se rattachent à une certaine représentation émergeant d'une façon particulière du groupe auquel elle appartient, représentation qui leur sert ainsi de signe. C'est bien là d'une façon générale le début de la formation du concept et de la forme la plus vraisemblable de ce concept chez ceux qui pensent sans la faculté de parler.

Les caractères communs à une suite de concepts se réunissent ensuite pour former un nouveau concept plus général et par cela même plus pauvre et ainsi de suite.

3. — **Quantités mathématiques discontinues** (suite). — Le concept du nombre exprimé par des chiffres ou par des mots appartient de sa nature à ceux qui se sont le plus détachés des représentations réelles qui les ont engendrés. Cela tient à ce que on ne peut se faire une représentation réelle que de tout petits nombres. Il y a peu d'hommes qui, du premier coup d'œil, puissent reconnaître un nombre d'objets convenablement choisis, (par exemple de boules de même forme et de même couleur,) — qui dépasserait cinq ou six. J'admets là que l'ordre géométrique des objets s'est trouvé autant que possible le même pour les différentes collections d'objets, que par exemple ils sont rangés à peu près en ligne droite. Dans la disposition uniforme sur une ligne droite ou même dans la disposition sur un cercle, où de plus il manquait un point de départ nettement distinct, Dahse ne pouvait, à ce qui m'a été dit, compter du premier coup d'œil qu'un nombre remarquablement plus petit que lorsque les objets étaient distribués sur une surface plane, où ils formaient des figures géométriques irrégulières qui les lui rendaient plus faciles à compter.

Ainsi admettons que nous ayons une représentation nette des nombres à peu près jusqu'au nombre sept, nous pouvons alors, jusque là, faire correspondre le concept de nombre d'objets à une suite de représentations particulières, comme nous pouvons faire correspondre le concept chêne à la représentation de tous les chênes que nous avons dans notre souvenir. Au-delà de ce chiffre nous avons bien des représentations réelles de pluralités plus ou moins grandes, mais cependant les représentations de nombres un peu grands se rattachent à la représentation du dénombrement; 31, par exemple, n'est pas une représentation tirée directement de la perception, mais elle suppose le fait préalable du dénombrement.

Or le dénombrement lui-même exige, quand on dépasse notablement le nombre 20, c'est-à-dire le nombre des doigts des mains et des pieds, un système de numération et par conséquent un certain degré de développemeut scientifique.

Le concept de nombre montre ainsi nettement tout d'abord deux degrés de développement dont le second comporte des commencements de science et ensuite un troisième complètement scientifique.

Au premier degré de développement nous trouvons les commencements les plus grossiers de la mesure des pluralités à l'aide de nombres ; ils se rattachent aux représentations tirées directement de la perception de tout petits nombres comme peuvent en avoir aussi les animaux, qui se mettent en défense contre plusieurs ennemis autrement que contre un seul. D'après des rapports concordants sur les peuples non civilisés de l'époque actuelle, ainsi que sur les époques antérieures à toute civilisation, cette numération primitive consistait simplement dans la comparaison avec les nombres des doigts des mains et des pieds. Nous en avons encore un témoignage dans notre système décimal de numération, ce détestable héritage de nos pères.— Le développement ultérieur du concept de nombre a fourni la suite illimitée des nombres entiers, déterminée par cette circonstance que chaque nombre représente une collection contenant un objet de plus que la précédente, et a établi dans cette suite des points de repère qui permettent de mesurer toutes les pluralités.

Enfin, le développement scientifique du concept de nombre s'est marqué dans la recherche des rapports entre les nombres entiers et a conduit finalement des règles de calcul les plus simples à la théorie des nombres. En vérité cependant, le chemin fut loin d'être aussi direct. Bien au contraire, les commencements du développement scientifique du concept de nombre concordent avec ceux du concept de quantité continue, tous deux se sont d'abord développés et formés par les exigences qu'ils ont montrées l'un à l'égard de l'autre, jusqu'à ce que une pensée plus profonde se soit plu aux belles propriétés des nombres pour elles-mêmes et que, au cours des années, elle ait posé les germes multiples d'une science qui, dans les deux derniers siècles, a atteint un si riche développement.

4. — Des quantités mathématiques continues. — Voici des exemples de grandeurs mathématiques continues : Longueur, surface, volume, poids, temps, vitesse, force, quantité de chaleur, intensité de lumière et de son, tension électrique, force de courant, etc.

Quand on parle des quantités mathématiques, on ne pense tout de suite qu'aux quantités géométriques, et, en particulier, à la ligne droite limitée en longueur, à laquelle on cherche à ramener les autres quantités parce que c'est incontestablement la représentation de cette espèce la plus simple, la plus invariable et la plus répandue. Ce n'est pas une représentation dans le sens déjà donné plus haut à l'occasion du nombre d'objets ; c'est plus proprement un concept mais qui, ici, à l'encontre du nombre, est si voisin le plus souvent d'une des représentations particulières d'où il a été tiré que dans la pensée cette représentation y supplée. Ainsi l'un en y pensant se représente une arête ou la limitation d'un plan ; pour un autre la longueur apparaît sous la représentation d'un fil ou d'un trait ou d'un rayon. Enfin, on y voit aussi la trajectoire parcourue par un point mobile à la manière des étoiles filantes.

Les quantités mathématiques continues que j'ai citées ont tout d'abord ceci de commun que leur mesure et leur comparaison dépendent des perceptions du sens de la vue, ensuite que leur qualité comparable ou mesurable devient toujours finalement l'étendue rectiligne, et qu'elles se laissent, comme celle-ci, partager et combiner par addition. Observons, pour expliquer ceci, les représentations mesurables de la géométrie.

5. — **Caractères communs aux quantités déjà citées et aux quantités géométriques.** — Sur la mosaïque d'un champ visuel, apparaissent des images telles que chaque morceau qu'on en découperait n'importe où possède les mêmes propriétés que l'image complète. L'intuition la plus immédiate de telles propriétés nous est offerte par l'image de la ligne droite limitée. Mais ce serait une erreur de vouloir l'affirmer aussi d'un arc de cercle non rectifié, parce que le rapport de la corde à l'arc ne reste pas invariable lorsque l'arc devient de plus en plus petit ; parce que, bien loin de là, dans une division prolongée de l'arc de cercle, la représentation cesse peu à peu d'être celle d'un arc et se change en celle de la ligne droite.

Au contraire, il en est des surfaces planes uniformément colorées et éclairées, quelle qu'en soit la forme, comme des lignes droites ; seulement cela n'est plus le fait d'une intuition directe. L'analogie entre les propriétés mesurables des lignes droites et la représentation de mesure qu'offrent de telles surfaces planes est rendue possible par l'intervention du concept nouveau de l'aire, c'est-à-dire de *l'exhaustion* d'une surface plane limitée d'une façon quelconque et du transport de ses portions de surface dans le cadre d'un rectangle, par exemple, dont la base serait fixe, tandis que la hauteur dans sa variation déterminerait à chaque instant l'aire du rectangle. Par cet

« épuisement » la comparaison et la mesure des surfaces semblables sont tout-à-fait ramenées à celles des longueurs. Si nous imaginons ensuite que notre représentation visuelle soit complétée par la représentation de l'espace, alors apparaît le concept de volume, dont nous exprimons la mesure à l'aide d'une longueur, absolument comme nous l'avons fait pour l'aire. Ce concept, tout comme la longueur, jouit de cette propriété, que les parties sont de même nature que le tout auquel elles appartiennent, ou que n'importe quel autre tout de même espèce. Dans les autres quantités mathématiques déjà citées on découvre également et sans peine la longueur qui fournit la mesure. Pour citer quelques exemples familiers : l'arc de cercle que décrit l'aiguille de l'horloge, une fois rectifié, fait dépendre le temps d'une longueur ; la graduation du levier de la bascule mesure le poids ; la force devient proportionnelle à l'énergie des phénomènes de pression et de mouvement, qui de leur côté peuvent être immédiatement exprimés en longueur, etc.

Maintenant, dans le cas où nos perceptions et nos observations nous apportent une espèce de représentations qui ne diffèrent entre-elles que par le plus ou le moins, nous nous sentons provisoirement satisfaits quand nous avons posé les divers degrés de cette représentation dans des rapports déterminés avec les représentations mesurables de la géométrie, quand, par conséquent, nous y avons trouvé une longueur donnant la mesure. Ceci nous apparaît, en effet, comme le premier pas fait vers l'intelligence mécanique des choses. Nous ne faisons en cela que suivre notre tendance à ramener ce qui est nouveau et compliqué, et par cela même trouble la quiétude de notre âme, à des choses vulgaires et familières, parmi lesquelles il faut compter en première ligne les représentations géométriques mesurables. Car, comparer et partager les étendues sont pour nous choses si naturelles que ces faits, comme le premier degré du concept de nombre d'objets, ne sont peut-être pas spéciaux à l'homme. Les concepts d'aire et de volume appartiennent aussi vraisemblablement aux premières acquisitions de l'esprit humain. L'espèce naissante pouvait les abstraire d'observations sans nombres. Le besoin d'étoffe pour les vêtements et pour les couvertures des tentes, la capacité de différents vases ou autres objets de même nature, la semence nécessaire à des champs, de formes et de grandeurs différentes ; ensuite, par les progrès de l'état de société de l'homme, les concepts de propriété foncière et des mesures conventionnelles et une foule de choses semblables ont fait de l'aire et du volume une des formes fondamentales d'intuition de notre esprit, L'enfant acquiert ces concepts, s'ils ne sont innés, par exemple,

en déchirant du papier et en jouant avec des vases qu'il remplit de sable ou de liquide.

Les représentations mesurables de la géométrie forment donc le point de départ auquel revient sans cesse notre pensée dans ses déductions rigoureuses. Cette affirmation ne rencontrera certainement pas de contradiction sérieuse.

6. — **Introduction du concept de quantité linéaire.** — Les quantités citées jusqu'à présent ont donc une propriété commune remarquable; elles peuvent se ramener aux longueurs; leurs différences, leurs parties et leurs multiples sont de nouveau des quantités de même espèce, comme pour les longueurs; elles sont, comme les longueurs, susceptibles de prendre des états très petits ou très grands; comme les longueurs, elles sont comparables, mesurables. Je nommerai les quantités mathémathiques de cette espèce : *Quantités mathématiques linéaires.* Mais il paraît convenable d'amplifier ce concept par rapport à l'étendue dans laquelle on fait correspondre la quantité linéaire à une longueur, que rien ne nous oblige à considérer comme illimitée.

Supposons donc établie entre une certaine quantité et une des quantités linéaires décrites tout-à-l''heure, par exemple, une longueur indéterminée, une relation telle que cette grandeur soit une fonction continue de la quantité linéaire, (que cette relation puisse être *observée* ou qu'elle soit la *conséquence d'un raisonnement*, ou enfin qu'elle soit un exemple *imaginé* par nous dans une intention quelconque). Si cette grandeur en augmentant ou en diminuant en même temps que la longueur à laquelle elle correspond se change en une grandeur de même espèce, d'où il suit, puisqu'elle est supposée continue, c'est-à-dire croissant par degrés aussi petits qu'on voudra, qu'elle commence par zéro, il faudra la considérer alors comme quantité linéaire, dût-elle ne pas croître indéfiniment. *On pourra, en effet, la faire correspondre point par point au moins à la ligne droite limitée et, comme elle, à l'exeption de l'étendue, elle possédera les propriétés des grandeurs linéaires.*

La concentration, c'est-à-dire le rapport d'une quantité de substance en dissolution à une quantité fixe d'un liquide dissolvant, nous fournit un exemple de grandeurs linéaires limitées. Elle peut varier entre zéro et l'infini, mais aussi entre zéro et une valeur finie. Il peut aussi, comme pour l'éther et l'eau, être nécessaire de considérer séparément les deux rapports, de l'eau à une quantité fixe d'éther, et de l'éther à une quantité fixe d'eau, pour faire de ces rapports des quantités linéaires selon notre définition. Un autre exemple de grandeur linéaire limitée est la probabilité d'être atteint à une distance

donnée du but du tireur. Si on la considère comme le rapport du nombre de coups s'égarant à cette distance à un nombre très grand de coups tirés, la différence de deux probabilités pareilles peut de nouveau être envisagée comme une probabilité.

7. — Ce qui peut se graduer suivant l'étendue ou l'intensité appartient aux quantités linéaires. — Toutes les espèces de quantités que nous pouvons considérer comme quantités mathématiques sont loin d'être linéaires, de sorte que notre tâche est tout d'abord d'acquérir au moins une idée approchée de la dissémination des quantités linéaires dans les différents domaines de la connaissance humaine. Cette tâche nous est facilitée par la remarque suivante :

On a coutume, on le sait, de partager les espèces de quantités en deux catégories selon qu'elles sont graduées suivant l'étendue ou l'intensité, (extensives et intensives). La multiplicité n'en est certes pas ainsi épuisée, mais ce qui est important c'est que toutes les suites de quantités se distinguant par l'étendue ou par l'intensité puissent être considérées comme appartenant aux quantités linéaires.

Je dis *appartenant* aux quantités linéaires. Car pour ce qui est des quantités variant suivant l'étendue, on ne peut pas, par exemple, considérer comme linéaire une suite continue de triangles semblables, leurs différences étant, entre autres raisons, quelque chose d'indéterminé, au lieu d'être de nouveau des triangles semblables. Mais ce qui distingue et détermine les triangles, périmètres, hauteurs, surfaces, etc....., est de nature linéaire. Ainsi nous pourrons dire d'une façon générale que ce qui est gradué seulement suivant l'étendue *peut-être ramené* à la mesure linéaire.

Au contraire, les suites de quantités continues graduées suivant l'intensité, quand elles peuvent être conçues comme quantités mathématiques, sont toujours linéaires.

La condition qu'une suite de quantités soit mathématique exige seulement que les individus de la suite soient définis en eux-mêmes d'une façon suffisante et nullement que nous puissions les déterminer actuellement en les faisant correspondre à une mesure linéaire, ou que nous supçonnions seulement le moins du monde comment nous pourrons jamais les y ramener. Cela posé, il nous faut chercher tout d'abord à montrer clairement ce que l'on doit entendre par « *différence d'intensité.* » Ce concept n'est pas, en vérité, aussi facile à analyser que celui de la différence d'étendue. Mais précisément ici, nous n'avons pas le droit de nous faire forts de ce qu'il ne nous est pas moins familier. Grâce à l'explication suivante de ce concept, je ne me suis jamais trouvé dans l'embarras.

Nous employons l'expression « différer en intensité », quand nous tenons les variations d'une grandeur (augmentation ou diminution) pour des grandeurs de même espèce ; quand par conséquent les différences dans une espèce de grandeurs nous apparaissent de nouveau comme des grandeurs de même nature.

Or, c'est là une des propriétés principales des quantités linéaires géométriques qu'à la vérité on ne distingue pas suivant l'intensité, mais suivant l'étendue. Cette dénomination différente de la relation entre les quantités de même espèce, dont les unes sont dites graduées selon l'étendue, les autres selon l'intensité, ne constitue donc pas une différence dans le caractère mathématique de ces grandeurs, et ce que nous venons d'exposer constate pleinement la nature linéaire des quantités mathématiques qui diffèrent suivant l'intensité, quand, bien entendu, on les suppose en outre suffisamment déterminées et continues. En effet, quand la variation d'une variable se fait par des différences pour ainsi dire, de même nature que la variable, elle doit, si elle est continue, commencer par zéro ; en outre, étant formée par des accroissements aussi petits qu'on veut, elle admet aussi nécessairement des multiples et des parties de même espèce, et c'est là précisément notre concept des quantités linéaires.

Pour éclaicir ce qui précède par des exemples, on dit de la *température* qu'elle est graduée suivant l'intensité. Cependant il faut ici distinguer la température sentie physiologiquement, c'est-à-dire la sensation de chaleur qui appartient aux sensations dont nous parlerons plus loin, et la température physique qui est l'expression de l'intensité du mouvement calorifique et par suite qui est la quantité linéaire proprement dite.

Enfin, mentionnons encore la *dureté* qui consiste en une *résistance*, non encore rigoureusement analysée au point de vue physique, que présentent les corps solides quand on veut leur faire subir des variations de formes qui dépassent les limites de l'élasticité (soit en les éraillant, soit en les pressant, soit en les brisant). S'il est ici question de différence en intensité on se représente clairement à l'esprit que les forces de résistance dont la dureté est la manifestation dans leur variation d'une matière à une autre, ou dans la même matière, (par exemple, sous l'action de la température,) subissent des accroissements qui sont des forces de la même espèce, et auxquels correspondraient certains degrés de dureté. Bref, la dureté est pour les forces de cohésion ce que la température est pour le mouvement calorifique.

J'ai choisi ces exemples, parce que la justesse de l'explication que nous avons donnée du concept n'y est peut-être pas

aussi évidente d'elle-même que dans les cas qui se présentent ordinairement.

Jugeant ainsi la nature linéaire des suites de quantités graduées suivant l'étendue ou l'intensité comme suffisamment fondée, cherchons maintenant à nous former une vue générale des quantités mathématiques propres aux différents domaines de la pensée.

8. — **Les quantités du monde extérieur.** — Tout d'abord, le monde de la perception que nous nommons monde extérieur. En première ligne, se trouvent les mystérieuses *causes premières* qu'on nomme forces et, en les mettant en avant, nous franchissons les limites du domaine de la perception et nous nous trouvons alors en plein dans l'empire des créations de la pensée humaine. Sous l'influence d'une poussée intérieure, nous concluons des phénomènes à l'existence des forces premières, et puisque enfin nous ne savons rien sur elles, nous devons voir dans les phénomènes leurs effets complets. Les effets sont ainsi dans notre représentation équivalents en quantité à la force qui les produit. Or ces effets, pressions, tensions, mouvements, sont des grandeurs linéaires, il en est donc de même des forces et voilà pourquoi nous les avons citées comme telles.

Si loin que nous soyons, et pour toujours, de pouvoir représenter mathématiquement tous les phénomènes du monde extérieur, aucune espèce de grandeur ne semble devoir s'offrir, qui ne puisse probablement être un jour comprise dans le concept des quantités mathématiques linéaires, ou mieux qui ne se révèle probablement un jour comme une quantité linéaire. Car partout où nous pénétrons, toute variation se montre graduée suivant l'étendue ou l'intensité, et nous considérons de pareilles quantités quand elles sont susceptibles d'une définition précise (ainsi que cela a été plus haut examiné de près), comme essentiellement linéaires, même si nous ne les avons pas encore ramenées, comme pour la dureté à leurs dernières variables linéaires géométriques et mécaniques.

9. — **Les quantités du monde de la perception interne. — Sensations graduées suivant l'intensité.** — Etudions ensuite en les considérant comme des quantités au point de vue de leurs propriétés, quelques phénomènes de la vie *interne* de l'âme. Les sensations par lesquelles des excitations ou irritations se révèlent à nous sont bien les plus simples phénomènes qui doivent se présenter ici, et offrent une foule d'espèces de quantités très instructives.

En premier lieu se trouvent les sensations graduées suivant

l'intensité, telles que la douleur, les sensations de la peau, les sensations d'intensité qui nous viennent des sens.

En appliquant aux sensations notre proposition relative aux quantités qui diffèrent en intensité. nous reconnaîtrons que ce sont aussi des quantités linéaires, lorsque, bien entendu, elles peuvent être considérées, avant tout, comme quantités mathématiques. On se représente bien, en effet, que si des excitations d'une même espèce s'additionnent, une somme de sensations produites respectivement par les différentes forces d'excitation, ne forme également qu'une seule et même sensation plus intense. Ainsi, on s'imagine qu'une impression de chaleur plus vive qui correspond à une élévation de température est produite par un accroissement de la *sensation*, lequel est lui-même une sensation de chaleur, de sorte que l'impression de chaleur devient comme une image intérieure de la température.

Il n'y a donc plus qu'à se demander si l'intensité de sensation est une quantité mathématique, si elle admet des valeurs particulières suffisamment déterminées pour être acceptées comme une fonction définie de quantités linéaires mesurables. La différence des forces de sensation qui correspondent dans des circonstances différentes à la même excitation, la brièveté du temps pendant lequel l'intensité de la force de sensation produite par une excitation constante reste la même, l'influence de la fatigue et, avant toute chose, le manque d'observation méthodique de soi-même, prêtent principalement aux sensations de l'odorat et du goût une apparence d'instabilité inappréciable qui peut nous entraîner à donner tout de suite à cette question une réponse négative.

L'investigation scientifique est loin d'être enrayée par une telle apparence d'instabilité ; elle cherche d'autant plus à fixer l'instable. Il existe sans aucun doute dans l'organe central un état correspondant d'une façon précise à l'excitation, état que notre conscience doit s'exercer à évaluer et à distinguer des influences voisines, et peut certainement apprendre à connaître petit à petit. D'ailleurs les sensations d'intensité des sens de l'ouïe et de la vue, qui se prêtent à une observation plus longue et à une comparaison plus facile que celles des sens du goût et de l'odorat, présentent aussi en général plus de sûreté et de fixité. Il ne semble donc nullement invraisemblable que, dans toutes les espèces de sensation ou dans quelqués-unes qui sont graduées suivant l'intensité, on puisse trouver les conditions sous lesquelles il nous serait possible de susciter à chaque instant des intensités de sensations particulières qui correspondraient à des quantités égales d'excitation et qui nous paraîtraient absolument égales. Cela

suffirait pour reconnaître dans les sensations des fonctions mathématiques des quantités d'excitation, surtout si l'on songe à la finesse quelquefois étonnante de nos sens pour la distinction des degrés d'excitations par les intensités de sensations, finesse des sens qui, comme l'apprennent de nombreux exemples, si elle n'est pas donnée naturellement, peut-être portée à un haut degré par l'exercice.

D'après cela nous pourrions être fondés à considérer les sensations graduées suivant l'intensité comme des quantités linéaires, c'est-à-dire comme des fonctions des quantités d'excitation qui commencent par zéro et dont les différences, les parties, les multiples, sont à leur tour, quoique non exprimables, des forces de sensations. Mais combien serait plus claire pour nous leur essence linéaire, s'il existait quelque principe qui nous mît en état, étant donné deux sensations, non seulement de reconnaître la plus forte ou la plus faible, mais encore de calculer numériquement leur rapport.

Pour les sensations qui varient suivant l'intensité, nous ne possédons précisément pas d'unité de mesure transportable qui soit elle-même une pareille sensation pouvant être perçue *en même temps* qu'une sensation à mesurer et que nous puissions également appliquer contre elle ; nous ne pouvons comparer les intensités de sensations que par le *souvenir*. C'est là, en ce qui concerne le rapport de mesure, la différence essentielle entre la vue et, par exemple, le goût. Car, supposons que notre perception de la vue ait les mêmes bornes que celles du goût, nous ne pourrions pas voir deux longueurs en même temps, une seule figurerait dans le champ uniforme de notre vue : sûrement nous serions aussi incapables de nous faire une idée d'une longueur double que nous le sommes en réalité de nous représenter une douceur double. Nous ne pouvons pourtant pas conclure de cette incapacité que le phénomène cérébral qui correspond à notre sensation de douceur ne fournisse pas l'idée du double de son énergie.

Poussons encore un peu plus loin l'opposition des deux sortes de sensations. La perception d'une ligne de longueur limitée sera transportée de la rétine au cerveau par la voie du nerf sans aucune perte. Qu'il vienne s'ajouter à la perception visuelle de la longueur limitée la vue simultanée de plusieurs longueurs ainsi que la possibilité de leurs déplacements respectifs dans le champ visuel, cela nous fournira l'intuition du double des longueurs et plus généralement de leurs rapports numériques. Enfin, le sentiment que cette *intuition répond à la réalité*, naît seulement du concept de l'espace, c'est-à-dire de l'apparition ultérieure du déplacement suivant la 3me dimension.

Dans les sensations qui diffèrent en intensité voici comment les choses se passent : sur la trajectoire nerveuse qui va de la membrane muqueuse de la bouche, par exemple, au cerveau, une fraction de l'énergie de l'excitation se perd vraisemblablement ; ce qui en arrive dans la matière cérébrale se résoud en un mouvement dont l'énergie est à son tour transformée partiellement en quelque autre chose, tandis que la dernière partie de cette énergie vient entière et complète se révéler à la conscience comme une sensation et à mesure que notre moi sentant, veut ou peut porter son attention sur elle, elle se trouve entraînée dans l'engrenage de notre pensée.

Cette partie de l'énergie est la quantité linéaire et elle prendra toujours (cœteris paribus) pour d'égales quantités d'excitation la même valeur suffisamment précise de façon à pouvoir être assimilée à une quantité mathématique. Pourrons-nous jamais la mesurer ?

Le problème que la vie nous présente sans cesse est au contraire celui de l'estimation et du calcul de l'excitation par la sensation, et en cela, comme nous le faisons pour nos perceptions de dimensions grâce à l'intuition de l'espace, nous jugeons que nos calculs de quantités d'excitations fondés sur des expériences variées sont aussi en accord avec ce qui nous paraît être la réalité.

Toutefois c'est une idée hardie qu'eut Théodore Fechner, le jour où il se posa ce problème inverse d'exprimer l'intensité de sensation en fonction de l'intensité d'excitation. Si peu certain que puisse paraître jusqu'à présent son résultat, il lui revient incontestablement l'honneur d'avoir le premier cherché scientifiquement à mesurer les sensations. (*)

(*) Le raisonnement qui conduit à sa loi psychologique consiste à peu près en ceci : Si une excitation croît à partir d'une valeur β, nous n'en percevrons pas la variation, malgré toute notre attention ; avant que l'excitation ait atteint une certaine force $\beta + \Delta\beta$ où $\Delta\beta$ dépend, suivant l'expérience, de la force d'excitation déjà existante β. Pour des poids posés sur la peau, et pris comme exitation E. M. Weber, a trouvé que $\Delta\beta$ est proportionnel à β. On applique cette loi à partir de la valeur $\beta = o$, il y correspond une valeur $\Delta\beta = \Delta\beta_o$ qui s'appelle le seuil de la sensation. Le fait important au point de vue de la théorie des grandeurs est qu'une pareille loi puisse être adoptée du moins entre de certaines limites, de sorte que nous n'avons pas à nous préoccuper ici de l'étendue dans laquelle la loi de M. Weber répond aux faits.

M. Fechner suppose, et ce point est le fondement de sa théorie, que l'accroissement $\Delta\gamma$ de la force de sensation γ lequel est précisément perçu, est indépendant de γ ; de sorte que γ est formée par l'addition d'accrroissements égaux $\Delta\gamma$ de sensation. Mais puisque $\frac{\Delta\beta}{\beta}$ est cons-

10. — Suites de sensations non graduées suivant l'intensité qui sont bien des quantités mathématiques mais non pas linéaires. — En dehors des espèces de sensations graduées suivant l'intensité, nous en connaissons où une classe de sensations se compose d'individus qui fournissent bien des impressions semblables les unes aux autres dans un certain rapport, mais dont la différence n'éveille pas, comme dans les sensations étudiées jusqu'ici, la représentation spontanée que chaque sensation individuelle est une somme d'accroissements élémentaires de même espèce.

---

tant, il peut alors conclure que $\Delta\gamma$ est proportionnel à $\frac{\Delta\beta}{\beta}$. Il paraîtra donc tout-à-fait admissible que traitant $\Delta\gamma$ et $\Delta\beta$ comme des différentielles, il conclue que γ est proportionnel à log. $\frac{\beta}{\Delta\beta_0}$, ce qui est sa loi psychologique. La quantité $\Delta\gamma$ est hypothétique ; c'est pourquoi, manquant de toute mesure pour la sensation, nous ne pouvons affirmer qu'il y ait erreur à trouver plus vraisemblable la proportionnalité entre les forces d'excitation et celles de sensation. La théorie de Bernstein me paraît le plus particulièrement parler en faveur de la loi de Fechner quoique d'une façon indirecte. Suivant toute vraisemblance, il correspond dans l'organe central aux terminaisons périphériques des nerfs qui reçoivent l'excitation un système bien arrêté de fonctions qui peut-être considéré comme l'image du monde extérieur entrant en relation directe avec notre corps. Sous ce mot monde extérieur il faut ici comprendre tout ce qui existe en dehors du sensorium.

M. J. Bernstein a essayé de nous donner une idée d'une fonction centrale de cette espèce qui mesurerait tout de suite la force d'excitation et expliquerait le phénomène de la sensation localisée. (Untersuchungen über den Erregung'svorgang im Nervem und Muskelsystème, p. 163, sqq.) Il a entrepris ensuite d'expliquer des expériences sur la localisation des sensations de la peau, par un certain mécanisme cérébral et ses constructions ingénieuses ont fourni le rapport de Fechner entre l'excitation et la sensation. La confirmation expérimentale des conclusions que J. Bernstein a tirées de sa théorie peut donc en fait être considérée comme une confirmation de la loi de Fechner ; quoiqu'il soit à peu près inutile de pénétrer plus avant dans les phénomènes qui séparent le phénomène générateur de la sensation dans le cerveau et l'aperception elle-même, je ferai tout fois la remarque suivante : Je me représente le moi sentant comme un phénomène psychique existant isolé, qui, ou bien, suivant le besoin de la pensée, recueille ça et là dans le mécanisme qui donne l'image du monde extérieur, des informations qui se présentent à lui, ou bien sous l'influence d'excitations particulières et plus puissantes, s'exerçant sur le mécanisme, les ressent involontairement. Ici donc l'état du mécanisme qui correspond à l'excitation doit dépasser un seuil de Fechner c'est-à-dire doit atteindre un certain degré pour pouvoir pénétrer dans la conscience, degré qui dépend toutefois de la fatigue de l'attention, des dispositions naturelles, de l'exercice.

Comme suite de sensations non graduées suivant la force, on peut citer entre autres : la hauteur du son, la couleur de la lumière, le timbre du son.

La hauteur du son constitue une sorte de transition. On ne pourra jamais la considérer comme une quantité mathématique linéaire, car pour cela, il faudrait qu'il pût être question d'une différence entre deux hauteurs de son qui serait à son tour une hauteur de son et d'une fraction de hauteur de son. En vérité la hauteur de son *physique* qui est donnée par la durée de la vibration, et qui est ainsi une simple durée de temps, devra être traitée incontestablement comme une quantité linéaire, si on n'y voit pas autre chose qu'une simple durée de temps ou qu'un nombre la rendant égale au nombre de vibrations d'une seconde. La différence entre deux hauteurs de son est alors la différence entre deux nombres ; mais la hauteur de son *physiologique*, c'est-à-dire celle qui est sentie, quand même elle serait susceptible d'une détermination plus précise et plus constante que les intensités de sensation, ne comporte pas de pareilles différences, et n'est donc pas une quantité linéaire. Seulement, par le fait que les impressions se distinguent ici seulement par cette différence de hauteur que connaissent bien la plupart des hommes à tous les degrés de culture, elle a, avec la quantité mathématique linéaire, une certaine parenté qui fait défaut aux autres quantités citées, couleur de la lumière et timbre du son.

Les couleurs de la lumière sont des impressions de nature tout-à-fait variées dans lesquelles on aurait difficilement avant Newton pressenti un ordre nécessaire ; du moins je ne sache pas que les phénomènes naturels de dispersion aient été ainsi expliqués. Mais dans tous les cas les couleurs peuvent être rangées en un ordre déterminé à l'aide duquel chacune d'elles correspond à une valeur particulière d'une quantité linéaire, la durée de vibration ou bien une abscisse du spectre que l'on fixera commodément. Entre les couleurs on établit encore des rapports en faisant correspondre à chaque couleur sa complémentaire ; ce sont ainsi certainement des quantités mathématiques quoiqu'elles ne soient pas linéaires.

Dans les sensations envisagées jusqu'ici l'excitation était donnée directement comme quantité linéaire. C'était ou bien un phénoméne mécanique produisant, par exemple, une sensation de pression ou de douleur, ou bien, comme pour la sensation de chaleur, de hauteur de son et couleur de la lumière, etc...., c'était un phénomène physique ramené depuis longtemps à des graduations de quantités linéaires.

Dans les sensations qui suivent il faut considérer au contraire la question au point de vue de la nature essentielle de l'exci-

tation prise comme quantité. Pour ce qui est du timbre du son, M. Helmholz a étudié avec plus de rigueur la nature des phénomènes physiques qui ont lieu dans l'air ou dans l'organe et auxquels correspond un certain timbre de son senti, quoique, par la nature embrouillée des phénomènes, le rapport entre le timbre du son et le genre de vibration de l'air, ne se prête pas encore à une détermination aussi simple et aussi précise que la hauteur du son. Mon père a établi pour les voyelles un ordre semblable à celui des couleurs du spectre, qu'ont approuvé les phonologues. (*) En tout cas, c'est là un premier pas dans la voie qui peut conduire à représenter la sensation du timbre comme quantité mathématique.

Enfin il faut rappeler les sensations de l'organe de l'odorat et du goût, en tant qu'elles sont différentes de nature. D'une façon générale on n'a pas encore découvert pour elles un principe pouvant servir à classer soit les excitations, soit les sensations. Les sensations de l'organe du goût semblent se limiter à peu d'espèces, tandis que les sensations de l'organe de l'odorat sont d'espèces très nombreuses; de sorte que ici un principe d'ordination serait incontestablement un progrès réel.

Les quantités de sensation de première espèce qui se distinguent par l'intensité sont aux quantités de sensation de deuxième espèce qui sont classées d'après leur nature, dans le rapport suivant : chaque sensation de deuxième espèce représente une suite particulière de sensations graduées suivant l'intensité. Toute couleur, hauteur de son, tout timbre de son, toute odeur et toute sensation de goût peut représenter une espèce de sensation, graduée suivant l'intensité.

12. — Les dispositions (**) de l'âme en tant qu'elles peuvent être saisies comme quantités mathématiques sont certainement nulles. — Insistons un peu sur les phénomènes de l'âme. Après les sensations viennent les *dispositions*, s'il est permis d'employer cette expression pour désigner les états de l'âme qui engendrent des désirs, des volitions, et en conséquence déterminent des actes, bref, comme dit Jean Müller, d'une façon générale, donnent naissance à des *tendances*. On ne peut méconnaître que la joie et la tristesse présentent des graduations constantes suivant l'intensité, et que, dans l'oscillation de la disposition de l'âme, le même état se reproduit un nombre incalculable de fois, de sortes que dans les dispositions on peut parler d'une certaine *égalité*. Tout ce qui s'appelle

(*) *Cadmus oder allgemeine Alphabétik von Félix Henry du Bois Reymond*, page 153.
(**) *Stimmungen.*

passion, affection, peut se différentier en plus ou en moins; par exemple crainte, angoisse, terreur, colère, fureur; et, en outre, plaisir, volupté, etc..... Les sensations et perceptions sont en vérité quelquefois aux dispositions à peu près dans le même rapport que les excitations aux sensations variables, en ce qu'elles produisent *directement* une certaine disposition : mais en général il y a entre deux excitations de l'âme, le *jugement* qui nous met hors d'état de faire correspondre les dispositions à des quantités linéaires. Néanmoins elles possèdent en partie quelques-unes de leurs propriétés caractérisques à un degré surprenant. C'est ainsi que la tristesse ou la joie peuvent s'accroître à la suite de petits incidents successifs, dont chacun pourrait à lui seul apporter un peu de tristesse ou de joie. Je suis donc convaincu qu'on est fondé à parler dans le sens propre du mot de joie double, de mauvaise humeur double. Toutefois la conception des dispositions comme quantités linéaires peut être encore plus facilement attaquée que la nature mathématique des sensations.

13. — Les quantités qui apparaissent dans les mathématiques elles-mêmes sont en partie non linéaires. — Les quantités mathématiques citées jusqu'ici ont été trouvées toutes dans le monde extérieur ou dans le monde intérieur de l'âme. Nous nommons de pareilles quantités *réelles*. Mais il y a des quantités que crée la pensée humaine et qui sont en dehors de tout rapport direct avec le monde de la perception. Les procédés logiques de la combinaison des quantités, une des opérations favorites de l'esprit humain, conduisent à certains symboles qui en mathématiques s'appellent quantités, et qui non seulement servent, comme en général les signes mathématiques, à résumer dans un signe les conclusions qui reviennent constamment, de sorte que la vue d'un pareil signe nous épargne la récapitulation d'une série de conclusions, mais qui aussi représentent une suite discontinue ou infiniment resserrée de signes mathématiques d'une certaine espèce.

Elles sont d'un intérêt particulier, ces quantités qui naissent de l'application des opérations mathématiques au-delà des cas où elles sont naturellement valables, (*) ou bien de la poursuite

(*) C'est ce que Hankel a appelé le principe de permanence des lois formelles. Il est peut-être bien risqué de faire déjà un principe de quelque chose qui réussit étonnamment, mais par hasard, quand, pour le moment, on n'a pu pénétrer que bien incomplètement dans l'essence du phénomène. Il y a une foule de cas où les lois formelles ne peuvent être appliquées au delà du domaine de valabilité, sans conduire à des résultats absolument inutiles. Par exemple, la loi formelle

$$\frac{d}{dx}\sum_{1}^{\infty} u_p = \sum_{1}^{\infty} \frac{du_p}{dx}$$

de certaines analogies, et auxquelles ne convient plus aucune signification numérique de sorte qu'elles ne peuvent jamais être prises pour des quantités linéaires. Ici, il est clair pour tout le monde qu'elles doivent leur nom de quantité uniquement à ce que leur origine et leur définition permettent de calculer avec elles comme avec les quantités réelles ; le plus souvent pourtant, à la condition de restreindre ou d'altérer certaines opérations auxquelles on peut soumettre les quantités linéaires.

Dans la quantité complexe, par exemple, la distinction de plus grand ou de plus petit disparaît pour se réfugier dans le module. « Dans l'infini des fonctions » ce qui fait le plus grand ou le plus petit, ce n'est pas la différence mais le quotient. (*) De même toutes les branches des mathématiques s'enrichissent chaque jour de quantités que l'on peut, pour les distinguer des précédentes, appeler *quantités analytiques.*

14. — Enfin il apparaît dans les relations humaines des quantités mathématiques qui n'ont rien de commun avec celles citées jusqu'ici. — Mais au fond, les quantités analytiques appartiennent encore elles aussi au monde de la perception ; les problèmes et méthodes de la mathématique satisfont tous finalement à notre tendance à comprendre mécaniquement le monde. Mêmes les doctrines les plus abstraites que l'analyse et la géométrie ont imaginées, tantôt pour suivre la marche tracée par un problème physique, tantôt les tirant de leur propre fonds, possèdent pour l'homme intelligent une valeur non moindre que telle méthode dont le but immédiat est pratique.

Dès qu'une combinaison de quantités paraît nouvelle, cela suffit pour lui accorder une valeur, car qui peut savoir si dès demain elle ne nous prodiguera pas les explications les plus désirées sur des points où nous les attendions le moins ? Sur les besoins scientifiques de l'avenir nous sommes précisément tout-à-fait hors d'état de juger parce que, comparés à la provision de choses inexplorées, soit en nous, soit hors de nous,

---

est valable dans une foule énorme de cas, mais au-delà, elle ne donne rien qu'une formule fausse.

(*) Nous montrerons plus loin ce qu'il en est des quantités infinitaires. C'est principalement la propriété de divisibilité qu'elles ne possèdent pas au sens des quantités linéaires ; attendu que de la divisibilité résulte immédiatement qu'on peut approcher autant qu'on veut de toute quantité linéaire donnée, — comme on approche de *un* à l'aide de la suite $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8} \ldots$ *Leipz. Ann.* XI Bd. *Uber die Paradoxen des Infinitarcalcüls. Art. 9.*

notre savoir et notre perspicacité sont une quantité infiniment petite dans le sens le plus propre du mot.

De cette remarque qui nous servira de transition des quantités réelles aux quantités mathématiques, il ne faut pas conclure qu'à mon avis il faille renverser les limites qui séparent les jeux savants de la mathématique, et que les combinaisons du jeu d'échec puissent être considérées comme occupant le même rang scientifique que celles de l'algèbre, par exemple, parce que personne ne peut savoir pour celles-là à quoi elles serviront un jour. L'inégalité de rang, que l'on sent en géneral entre les combinaisons d'échecs et celles de la mathématique, me paraît, abstraction faite de l'utilité pratique, consister en ce qui suit :

On ne peut nier que le problème du saut du cavalier, et particulièrement ce qu'on appelle les fins de parties de jeu d'échecs, avec leur conclusion qui se déduit nécessairement de la pose initiale de quelques figures, présente le caractère propre aux questions vraiment mathématiques, dans les limites d'un champ de combinaisons très restreint. Mais à la *partie de jeu* se mèle un élément aussi nécessaire qu'il est peu mathématique, à savoir *les fautes de pensée*. La partie de jeu proprement dite n'appartient pas à la mathématique parce qu'elle suppose des partenaires dont le jugement est humainement imparfait. Si on écartait les fautes, le jeu fournirait des problèmes de combinaisons sans doute sérieux, mais d'une complication inouïe. On serait déjà dans l'embarras si on voulait expliquer ce qu'il faut entendre par : un coup d'échecs parfait. (*) Le champ de combinaisons est si restreint qu'il ne récompense pas des recherches d'une aussi extraordinaire difficulté, — pas plus que le si petit nombre de résultats nouveaux, qui sont en perspective. Il en est de même des jeux de cartes savants où on laisse au hasard la plus petite influence possible.

Les quantités qui interviennent dans les jeux, distinctes par leurs valeurs, ont de commun avec les quantités analytiques mentionnées la non réalité, mais elles n'ont pas comme celles-ci avec la réalité un rapport à peine moins étroit que beaucoup de quantités réelles ; surtout elles correspondent à des champs extraordinairement pauvres de combinaisons ; nous leur donnerons le nom de *quantités de jeu*, et nous terminerons là cette revue des différentes espèces de quantités du monde de la perception.

(*) Entre des êtres raisonnant avec une rectitude parfaite toute la partie se bornerait à tirer au sort le premier coup.

15. — Tout ce qui précède montre que nous avons surtout à étudier avec le plus de rigueur possible le concept de grandeur linéaire. — Ici donc se termine notre revue. Après avoir examiné suivant tant de directions ce qu'il faut entendre par grandeur mathématique, nous avons appris à délimiter à peu près ce concept. Pour résumer en peu de mots nos résultats acquis, la rigoureuse science de la nature tend à retrouver sans cesse dans tout ce qui est variable la même espèce de grandeurs, à savoir les quantités mathématiques linéaires, jointes au concept du nombre, et l'essence des choses ne présente aucun obstacle invincible qui s'oppose à cette tendance.

Les champs d'études, que recouvre l'obscurité des phénomènes psychiques, nous montrent à côté de quelques espèces de grandeurs graduées à la manière des linéaires, des espèces auxquelles il peut arriver un jour de revêtir l'uniforme de la mesure de longueur, quoique elles soient de nature toute différente. Les autres grandeurs que nous rencontrons dans le monde de la pensée humaine ou bien sont des créations de nos méthodes de raisonnement scientifiques, ou bien servent à notre divertissement.

On n'a pu encore donner jusqu'ici une définition spéciale plus précise du concept de quantité linéaire. Leur propriété principale est, nous l'avons montré, que comme la longueur, elles se prêtent à des comparaisons de mesure, et que même finalement, elles peuvent être saisies comme une longueur, — nous n'avons pas d'ailleurs indiqué avec plus de précision ce qui caractérise la mesure des longueurs elle-même. Nous avons posé plus haut comme signe des quantités linéaires une certaine homogénéité, en vertu de laquelle leurs différences, parties et multiples sont encore des quantités de même espèce. Enfin, il a été question de la fusion des concepts de quantité et de nombre.

Tout ceci doit être maintenant exposé avec beaucoup de soin car le concept de grandeur est la clé unique et nécessaire pour arriver à l'intelligence des autres concepts fondamentaux de l'analyse.

Le concept de quantité tel que nous voulons le décrire maintenant se présente sous trois degrés différents d'abstraction. Tout d'abord c'est un concept brut, impliquant une idée vague de comparaison, qui pourrait bien n'être pas exclusivement humain. En vue de la mesure, il s'affine et reçoit le contenu que nous pouvons considérer comme l'origine des mathématiques. Quand, nous fondant sur l'intuition habituelle et naturelle des choses, nous l'aurons analysé le mieux possible, il semblera, et cela est pour le moment notre but, il semblera,

dis-je, que nous soyons tout-à-fait parvenus à la délimitation précise du concept de quantité et que le dernier mot là-dessus ait été dit.

Mais nous trouverons ensuite que cela n'a simplifié en rien pour nous la difficulté du concept de limite. Nous serons donc obligés encore une fois de remonter à la naissance du concept de quantité linéaire et de le poursuivre cette fois jusque dans ses racines les plus tenues. On voit ainsi que la pénétration véritable dans l'essence des deux concepts de grandeur et de limite est indivisible, ou plus exactement les deux choses s'équivalent, comme je l'ai déjà déclaré il y a longtemps. (*) Ce troisième degré de l'abstraction du concept de grandeur aide donc aussi à mettre en lumière cette remarquable opposition des deux intuitions fondamentales propres à l'homme dont il a été question dans la préface et qui reviendront plus tard sous le nom d'idéalisme et d'empirisme.

16. — Définition plus précise du concept de quantité linéaire. — Puisque les quantités mathématiques linéaires dont l'extension n'a pas de limite se comportent, en tant que grandeurs, comme des longueurs, il n'est pas nécessaire d'en avoir constamment présente à l'esprit toute la multiplicité, il suffit de penser tout simplement aux longueurs. Toutefois nous conservons la désignation de *quantité*, n'employant l'expression plus explicite « quantité mathématique linéaire », que là où ce caractère des grandeurs devra être accentué.

Le premier degré de l'abstraction de quantité linéaire est ainsi caractérisée :

Comparaison sans la représentation de mesure.

I. — *Les quantités mathématiques linéaires sont ou bien égales ou bien inégales. Elles sont égales si leurs manifestations sensibles produisent la même impression dans les mêmes conditions. L'une est plus grande que l'autre si son image sensible peut-être diminuée par exhaustion de telle manière qu'elle puisse exactement coïncider avec l'autre, la chose inverse étant d'ailleurs impossible.*

II. — *Parmi les quantités linéaires d'une espèce, par exemple, pour toutes les étendues possibles, aucune en particulier ne jouit d'une prérogative, et nous ne nous représentons ainsi comme nécessaire aucune limite dans la petitesse ou la grandeur d'une quantité.*

(*) J'ai commencé cette étude dans l'introduction à l'article déjà cité, *Ueber die paradoxen des infinitarcalculs.*

III. — *Deux ou plusieurs quantités de même espèce réunies, donnent une nouvelle quantité de même espèce, plus grande que ses éléments composants. D'un autre côté toute quantité peut-être partagée en un aussi grand nombre qu'on voudra de quantités de même espèce, dont chacune est plus petite que la quantité non partagée.*

Tandis que la première partie de la propriété III donne la représentation de la somme, la deuxième contient incontestablement le germe de la comparaison de mesure ; car ce qui intervient là ce n'est pas un assemblage fortuit de quantités, mais un àssemblage qui fournit un certain résultat et engendre le concept de la différence dans lequel nous trouvons distinctement le caractère de mesure — On arrive ainsi à la *Comparaison aveé la représentation de mesure :*

IV. — *Quand une quantité est plus grande qu'une deuxième, il en existe toujours une troisième de même espèce que ces deux là, qui, unie à la deuxième, reproduit la première.*

Suppose-t-on égales la deuxième et la troisième, on est conduit alors par la proposition IV au partage avec propriété de mesure. Puisque nous voilà parvenus au partage en deux parties égales nous pourrions, étant donnée une quantité, en chercher une deuxième plus petite, telle que la différence fût la moitié de la plus petite, etc..., Pourtant ce n'est guère ainsi que le genre humain a acquis les intuitions communes à tous les hommes, auxquelles nous arriverons maintenant. Mais il suffit pour notre recherche, de pouvoir les supposer communes à tous les hommes, et il est tout à fait inutile que nous nous perdions en conjectures sur la façon dont ils les ont acquises.

Si on réunit des quantités égales, en disposant à volonté de la grandeur et du nombre de ces quantités, la quantité qui en représente la somme est également arbitraire. Nous nous représentons très-bien que, si grande que soit supposée une quantité, on peut en composer une qui la surpasse en grandeur en ajoutant des quantités égales entre elles dont la grandeur ou le nombre peuvent être arbitraires. Nous avons ensuite la représentation qu'une quantité quelconque peut-être composée rigoureusement à l'aide de quantités plus petites égales entre elles, dont nous pouvons choisir arbitrairement le nombre et que, ce nombre croissant, la petitesse des parties tombe au-dessous de toute limite.

Nous possédons ces représentations. Elles nous sont aussi naturelles et familières que celles qui concernent nos besoins physiques. Est-ce là une forme de pensée innée ou implantée chez l'individu par transmission, ou acquise par une observation

personnelle, cela nous est tout aussi indifférent que la manière dont elle résulte de représentations plus simples.

Les propriétés de l'addition et du partage des quantités sont les propriétés fondamentales de l'analyse, mais en particulier cela est vrai de la divisibilité illimitée des quantités mathémathiques linéaires, qui contient *in nuce* le concept de limite. Ajoutons maintenant aux propriétés données plus haut celles qui suivent :

V. — On peut toujours additionner des quantités égales ou inégales, dont la plus petite ne doit pas tomber au-dessous d'une quantité prise aussi petite qu'on a voulu, en nombre suffisant pour atteindre une quantité qui n'est pas inférieure à une quelconque de même espèce, donnée d'avance.

VI. — Une quantité peut être d'une foule de manières, partagée en plus petites, et parmi ces divisions, se distingue celle qui se fait en deux ou trois, ou en un plus grand nombre de parties égales. Le partage d'une quantité peut se continuer jusqu'à ce que toutes les parties deviennent plus petites qu'une quantité de même espèce supposée aussi petite que l'on veut. Mais si loin qu'on puisse supposer poussée la division, les parties sont toujours des quantités de même espèce.

Je veux d'ailleurs remarquer expressément que dans le tableau précédent je ne me suis pas proposé de ramener les propriétés du concept à leur mesure *nécessaire* et d'acquérir ainsi le *plus petit nombre* possible de perceptions, sur lesquelles notre pensée fondant son travail nous fournit la représentation de la quantité mathématique linéaire, comme nous la tirons sans doute de perceptions variées et sans nombre. — Cela exigerait une recherche d'une nature extraordinairement délicate, qui nous égarerait. On ne pourrait d'ailleurs répondre à la question concernant le plus petit nombre nécessaire de propriétés que par une étude approfondie et complète du concept de grandeur. Mon but a été seulement de donner une définition telle que chacun y reconnaisse le concept qu'il possède des quantités mathématiques linéaires de la géométrie, et, suivant l'étendue de ses connaissances, les propriétés d'autres quantités linéaires innombrables qu'offrent les branches les plus diverses de la science.

Aux premières représentations brutes de la quantité mathématique linéaire, c'est-à dire vraisemblement à la représentation fondamentale la plus ancienne et la plus répandue des choses qui, ne différant qu'en grandeur ou en petitesse, se prêtent tout de suite à une mesure plus rigoureuse, s'est joint incontestablement le concept d'unité de mesure, et l'unité a été

suivie des nombres fractionnaires. Le fait de mesurer avec les unités a produit la science de la mesure, et celle-ci, sans cesse invoquée dans des recherches et des observations dans le ciel et sur la terre, a généralisé ses problèmes, agrandi ses vues, perfectionné ses méthodes et toujours augmenté l'ensemble de connaissances et de théories, d'où les mathématiques sont sorties dans les derniers siècles comme une science indépendante.

Considérons donc encore l'union des concepts de quantité et de nombre: Ces explications préliminaires sur le concept de quantité y trouveront leur conclusion.

Quantité, nombre et formalisme littéral.

17. — L'unité et le un. — Pour comparer entre elles plus de deux quantités mathématiques, et aussi pour pouvoir s'exprimer avec une parfaite précision sur la variation des quantités, il faut fixer l'unité de grandeur, ou simplement l'unité, c'est-à-dire une quantité déterminée parmi celles d'une certaine espèce à laquelle on compare les autres et qui sert à les mesurer. Ce n'est pas seulement la divisibilité des grandeurs qui engendre le concept de l'unité, c'est aussi, comme je l'ai observé, l'attention fixée simultanément sur plusieurs quantités.

Un certain degré de développement de la science de la mesure exigea un jour la division *indéfinie* de l'unité pour qu'on pût comparer entre elles d'une façon rigoureuse à l'aide de l'unité des quantités différentes. C'est là évidemment l'origine des nombres fractionnaires qui, dans la représentation, rappellent en effet toujours un certain partage. On aura assurément à distinguer ici encore au moins deux degrés de développement du concept. Les nombres fractionnaires les plus simples correspondent probablement à un degré de culture à peine moins avancé que les nombres entiers ; le besoin journalier de partager la nourriture ou le butin ou toute autre chose a dû y conduire ; tandis que les fractions qui ont de plus grands numérateurs et dénominateurs, et surtout le concept développé de la fraction, appartiennent déjà à la science de la mesure. Il est instructif d'opposer l'un à l'autre le concept de la quantité dans sa liaison avec les nombres fractionnaires, et le concept des nombres entiers.

Ce qui sert de base au concept du nombre entier, c'est le *un* qui est profondément distinct de l'unité. Comme le *un* est le point de départ des nombres entiers, l'unité est celui des nombres fractionnaires. Toute unité est un *un*, mais tout *un* n'est pas une *unité*. Et il est heureux que pour ces deux concepts absolument distincts, nous ayons en même temps deux mots à notre disposition. Du reste ces deux sortes de

nombres, nombres entiers et nombres fractionnaires, finissent par ne former qu'une seule et même suite par l'intermédiaire du concept de mesure. Car bien que l'idée du nombre entier naisse indépendamment du concept de quantité, et n'ait directement rien de commun avec lui, le concept de quantité tel que nous l'avons décrit suppose déjà le concept de *nombre d'objets* et complète ce concept de nombre à l'aide des nombres fractionnaires.

On est conduit, par ce qui précède, soit dit en passant, à voir dans la théorie des nombres, en tant qu'elle se borne à l'étude des rapports et propriétés des nombres entiers, une science existant en principe, en dehors de l'analyse, et qui tôt ou tard formera un tout distinct. Car si nombreux que puissent être ses points de contact avec l'analyse, si utile que celle-ci puisse lui être encore, — (ce qui peut donner pour quelque jour l'espoir d'une riche compensation), on est cependant fort tenté de croire que la théorie des nombres entiers peut atteindre un terme qui nous paraît aujourd'hui inaccessible à l'analyse, et qu'elle parviendra un jour à tirer d'elle-même la démonstration de tous ses théorèmes. Je ne songe naturellement pas à tenir pour limités les rapports des nombres entiers et de l'analyse. Dans tout phénomène variable il peut arriver que des nombres entiers viennent attirer notre attention et acquièrent une importance décisive.

18. — Des nombres en tant que signes et quantités, et du formalisme. — Comme les nombres fractionnaires ont dû naître du partage de l'unité qu'a exigé la mesure, on voit aussi, dès qu'on veut y attacher un sens, qu'ils sont inséparables de la représentation d'objets partagés. D'après cela il doit paraître contre nature de vouloir construire l'analyse au moyen de nombres purs, sans tenir compte de leur source : les concepts de quantité d'objets et de grandeur. Combien une pareille séparation est artificielle, on le voit de la façon la plus nette quand il s'agit de la limite irrationnelle d'une suite de simples nombres. Les nombres 1, 2, 3... $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \cdots \frac{2}{3} \cdots$ sont ou bien des signes de quantités réelles, ou bien simplement des figures dont on peut certainement se servir comme de quantités de jeu, (article 14). Or il est vrai que, lorsque nous sommes plongés dans un calcul numérique ou dans un problème d'algèbre, il ne nous vient pas à l'idée de voir constamment des quantités réelles sous nos nombres ou nos lettres, qui représentent des nombres laissés indéterminés. Pourtant, dans le développement des concepts analytiques fondamentaux, cela ne nous autorise pas plus à faire abstraction de leur origine véritable, que la philo-

sophie du langage ne saurait, pour des raisons semblables, se montrer satisfaite à la constatation d'une langue toute formée. La représentation du chiffre vient dans le travail rapide de la pensée, à la place de celle d'un rapport à l'unité de grandeur. Il en est de même en réalité du langage, en tant que les mots sont devenus des représentations indépendantes. Pendant qu'on écrit ou qu'on parle, à la place des représentations réelles défilent en grande partie les représentations de mots elles-mêmes, quoique durant ces actes, comme on le voit en s'observant tant soit peu soi-même, telle ou telle des représentations correspondantes emmagasinées dans la mémoire s'échappe et dépasse le seuil de la conscience.

De ces deux questions, l'étude de la texture du langage tout formé et la recherche de l'origine des mots et des formes grammaticales dans la formation des concepts humains, on pourrait se croire fondé à résoudre la dernière, par exemple, en supposant le langage inné chez l'homme, parce que précisément on trouve que le langage tout formé s'est en partie dégagé des représentations que les mots désignent : Assurémenton se ferait ainsi grâce de la moitié de la besogne. C'est à peu près ce que ferait l'analyste qui étudierait les fondements de sa science et qui, s'affranchissant du concept de grandeur, ne voudrait rien voir en analyse, que des symboles numériques et littéraux.

L'insuffisance du formalisme pour concevoir le sens des opérations arithmétiques les plus simples ressort entre autres de la multiplication des fractions. Comment arrive-t-on à la règle de la multiplication des fractions, suivant laquelle, par exemple, $\frac{8}{15}$ est le produit de $\frac{2}{3}$ et de $\frac{4}{5}$. Le détour que fait Euler cache la difficulté (*) car ce n'est pas ainsi que la règle est née. On cherche vainement aussi, semble-t-il, chez les plus anciens auteurs, une explication du sens primitif de la règle. (**)

(*) Euler définit $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ les $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$, sans doute de cette façon le résultat est établi. (Voyez Algèbre d'Euler, page 106).

(**) Pour savoir comment les plus anciens traités de calcul présentent la règle de multiplication, je priai M. Cantor, à Heidelberg, de me renseigner. Il eut la bonté de me donner la réponse que voici : « Le plus ancien traité de calcul que nous ayons de l'an 1700 environ avant J.-C. (Papyrus de Ahmos, traduit par August Eisenlohr) renferme des multiplications de fractions de toutes sortes, et le plus souvent, en vérité, sur des nombres abstraits. On n'y trouve pas de fondement à l'égalité $\frac{a}{b} \times \frac{\alpha}{\beta} = \frac{a\alpha}{b\beta}$ Le calcul est ainsi conduit que $\frac{a}{b}$ & $\frac{\alpha}{\beta}$ sont également décom-

Mais si on renonce à tirer une idée de purs symboles, et qu'on voie dans les fractions ce qu'elles sont réellement, c'est-à-dire des parties d'unités de grandeurs linéaires, l'origine vraisemblable de cette règle apparaît alors aux yeux de tous avec la plus grande clarté. A côté de l'unité de longueur, l'unité de surface parut aussi nécessaire pour mesurer les surfaces planes, et ce qui fut reconnu comme le plus conforme à ce but c'est le carré, dont la forme ramène intuitivement à la mesure des longueurs. L'aire la plus simple de forme après le carré, le rectangle, quand les côtés étaient multiples de ceux du *carré unité*, donnait l'image directe de la multiplication des nombres entiers. Les rectangles plus petits que ce carré en exigeaient le partage et conduisaient ainsi à la multiplication des fractions. Dans ce regard en arrière, nous supposons, bien entendu, qu'il n'intervient que des rapports rationnels de longueur. — Quelque esprit plus ingénieux partage le rectangle de côtés $\frac{2}{3}$ et $\frac{2}{5}$ ainsi que le carré unité en carrés de côté $\frac{1}{15}$ pour les rendre comparables l'un à l'autre, et il reconnaît aussitôt que le rectangle vaut les $\frac{8}{15}$ du carré. On croit les voir, les chasseurs qui établissent domicile, mettre trêve à leurs disputes et désor-

---

posées en fractions partielles de numérateur 1. $\frac{a}{b} = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + .. + \frac{1}{b_m}$ $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} + ... + \frac{1}{\beta_\mu}$. On a alors :

$$\frac{1}{b_1}\left[\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} + .. + \frac{1}{\beta_\mu}\right] = \frac{1}{b_1\ \beta_1} + \frac{1}{b_1\ \beta^2} + .. + \frac{1}{b_1\ \beta_\mu}$$

$$\frac{1}{b_2}\left[\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} + .. + \frac{1}{\beta_\mu}\right] = \frac{1}{b_2\ \beta_1} + \frac{1}{b_2\ \beta_2} + .. + \frac{1}{b_2\ \beta_\mu}$$

$$\frac{1}{b_m}\left[\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} + .. + \frac{1}{\beta_\mu}\right] = \frac{1}{b_m\ \beta_1} + \frac{1}{b_m\ \beta_2} + .. + \frac{1}{b_m\ \beta_\mu}.$$

On réunit en une seule expression tous les produits partiels, soit en écrivant simplement les uns à la suite des autres les éléments de tous les produits ordonnés suivant leur grandeur, soit en effectuant l'addition de quelques uns, par exemple, en remplaçant $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ par $\frac{1}{2}$, — soit enfin en les réduisant au même dénominateur. On obtient ainsi naturellement $\frac{a\alpha}{b\beta}$.

mais se partager entre eux la propriété d'après cette règle. En tous cas, la multiplication des fractions devient ainsi une suite toute naturelle et extrêmement claire de la multiplication des nombres entiers, et on peut très bien l'avoir trouvée aux premières époques de la science préhistorique de la mesure.

Du reste, de ce que je viens d'alléguer en faveur de la vraie signification des symboles mathématiques, il ne faut pas conclure que je méconnais l'utilité des recherches sur ce qu'on peut appeler le *mécanisme du calcul*, recherches par lesquelles Hamilton, Grassmann et d'autres, notamment de nos jours M. Weierstrass, ont jeté un grand jour sur la nature des opérations composées et des quantités complexes. Mais pour bien comprendre la portée de ces recherches il faut jeter un coup d'œil en arrière sur les premiers développements historiques de la science. Les opérations analytiques les plus simples sur une ou deux quantités, l'addition, la soustraction et la division, qui probablement a déjà pour origine la soustraction repétée, ont conduit par leur répétition et leur extension à plusieurs quantités, à l'algèbre, au calcul des puissances, aux logarithmes, au symbole imaginaire. D'un autre côté, la trigonométrie est venue se joindre à ces théories en s'amalgamant entièrement avec elles. Ajoutons la création des opérations infinies et de l'analyse infinitésimale et nous aurons énuméré les conquêtes les plus importantes qu'a faites au cours des siècles le génie analytique humain. Or tout cela n'a nullement été construit *a priori*. Au contraire, on ne saurait douter, et l'on peut s'en convaincre historiquement, que l'analyse est une science expérimentale en tant qu'elle a réalisé ses progrès en tâtonnant à pas lents, et d'essais en essais qui ne réussissaient pas toujours. Ordinairement, des problèmes simples sur des quantités réelles suggéraient des opérations, élargies ensuite par induction, jusqu'à former des méthodes que l'on se croyait en droit de tenir pour sûres, sans avoir même songé à la nécessité d'une démonstration, comme par exemple la décomposition des polynomes en facteurs simples. C'est ainsi que les choses se sont passées en algèbre durant des siècles, que nous avons presque perdus de vue, et aussi dans des temps plus rapprochés dans le domaine des opérations infinies, où seulement depuis Gauss, Cauchy, Abel et Lejeune Dirichlet, on a senti le besoin de justifier les méthodes fournies par l'induction. Le fait est qu'on se trouve tout-à-coup en face du spectacle stupéfiant de l'analyse toute formée, avec ses méthodes merveilleuses usant en partie de symboles purement littéraux, mais conduisant toujours à des résultats corrects. Nous apprenons et nous employons cette science, dont la génèse primordiale nous échappe complètement, en ne cherchant de démonstra-

tions que pour des faits isolés, démonstrations qui se fondent elles-mêmes sur le fait de l'analyse préexistante. Et ici surgit encore une question : La forme actuelle de l'analyse est-elle nécessaire ? Ne pourrait-on pas inventer d'autres signes représentant d'autres combinaisons de conclusions et d'autres symboles littéraux, peut-être plus profitables encore que les combinaisons et les symboles actuels ? Or, quand on réfléchit sur cet ensemble de questions que nous présente le fait de l'analyse toute formée, il faut évidemment distinguer deux choses : les opérations simples dont la répétition a conduit au calcul analytique *et ce calcul lui même.* Aux premières, il faut adjoindre l'essence des opérations infinies les plus simples, notamment le concept de la limite, qui est le principal objet de ce livre.

Pour ne pas trop embrasser à la fois, il convient de traiter séparément ces deux genres de questions. En effet, les recherches sur les opérations simples et sur le concept de la limite roulent sur les questions les plus abstraites de la connaissance, tandis que le *mécanisme du calcul* peut-être traité en partant de données purement littérales. Voici comment on peut définir le problème que présente le mécanisme du calcul : Réduire au plus petit nombre possible les règles simples entre les lettres ou signes introduits pour représenter les indéterminées du calcul ; ces règles sont censées permettre d'exécuter toutes les opérations qu'il s'agit d'expliquer, sous cette condition que si l'on suppose données des relations quelconques, fixées par des équations, entre les lettres ou signes, ces relations subsistent durant tout le calcul (transformation des équations originaires au moyen des opérations simples ou composées), et peuvent être vérifiées pour chaque tranformation que le calcul fait paraître. En concevant ainsi le mécanisme du calcul, on peut aussi partir d'opérations simples qui ne découlent plus du concept de la quantité mathématique linéaire, mais qui, en satisfaisant à la seconde condition, peuvent servir de base à un calcul tout-à-fait légitime, et conduisent nécessairement à des résultats corrects, comme cela a lieu pour la multiplication intérieure de Grassmann. Dans le grand nombre de traités et de mémoires qui ont paru sur ce sujet, les auteurs ont souvent confondu les deux problèmes, celui de la métaphysique des opérations simples, et celui du mécanisme du calcul, et la clarté des idées n'y a point gagné. Dans toute cette littérature il ne s'agit d'ailleurs guère que du calcul entre quantités supposées finies. On y peut ramener, comme nous le verrons dans la suite, le calcul des différentielles, qui a tant intrigué les géomètres du siècle passé. Mais reste encore l'analyse des opérations infinies et des variables continues. Ici encore on a

essayé de séparer une analyse purement littérale des concepts de grandeur et de limite. C'est Heine qui dans ses éléments de l'enseignement des propriétés des fonctions (*) introduit une lettre pour désigner la limite d'une opération constatée comme convergente par le principe général de convergence, lettre qui figure comme les autres lettres dans le calcul. Par là même il met hors de discussion toute la métaphysique de la limite, etc. Mais si, comme je l'ai exposé plus haut, une pareille séparation peut-être utile pour l'analyse algébrique, attendu que les opérations élémentaires y forment un problème de connaissance à part, qui peut être facilement détaché du problème littéral sur le mécanisme du calcul, espèce de jeu logique entre de purs symboles, elle paraît l'être moins pour le calcul des fonctions dans leur conception la plus générale. Un esprit qui aime à approfondir les choses ne saurait en être satisfait. Ce n'est pas à dire, que pour les besoins de la pratique ordinaire, pour l'enseignement élémentaire, où l'on n'a affaire qu à des fonctions régulières, il faille remonter aux questions subtiles relatives à la continuité et à la limite. Un professeur chargé d'enseigner l'anglais à un élève négociant ne commencera pas par lui faire un cours sur la linguistique générale et sur l'origine de la langue anglaise en particulier. Mais quand il s'agit de traiter toutes les questions qu'offre la théorie des fonctions de quelque nature qu'elles soient, par exemple certaines questions qui ont trait aux solutions des équations aux différentielles partielles, on ne pourra guère se dispenser de remonter aux concepts fondamentaux, et quand même on le pourrait on ne serait pas au terme de ses vœux, on sentirait qu'on n'a pas pénétré à fond la matière. En somme, si pour l'analyse algébrique le problème du mécanisme du calcul offre peut-être plus d'attraits, pour l'analyse infinitésimale c'est bien le problème de la connaissance qui présente le principal intérêt, et l'importance décisive. Et voilà un point saillant de la question.

Un squelette purement formel et littéral de l'analyse, auquel se ramène la séparation du signe analytique d'avec la grandeur, finirait en effet par faire dégénérer cette science, qui en vérité est une science naturelle quoiqu'elle borne ses recherches aux propriétés les plus générales des choses perçues, en un simple jeu de symboles, où les signes écrits prendraient des significations arbitraires comme les pièces du jeu d'échecs ou les cartes à jouer. Si intéressant que puisse être un pareil jeu, si profitable et même nécessaire qu'il soit aux fins de l'analyse, pour suivre jusqu'à leurs dernières conséquences littérales les règles du calcul des symboles, nées de la repré-

(*) *Die Elemente der Functionenlehre, J. de Borchardt.— Vol. 74.*

sentation de quantité, cette mathématique littérale, quand elle serait complètement arrachée du sol où elle a poussé, ne tarderait pas à s'épuiser en une croissance inféconde, tandis que la science, si bien nommée par Gauss science des grandeurs, a, dans le domaine naturel de la perception humaine dont l'extension va toujours grandissant, une source intarissable de nouveaux objets d'étude, et d'impulsions fécondes. Sans aucun doute, à l'aide de prétendus axiomes, de conventions, de *philosophèmes* imaginés ad hoc, d'élargissements inconcevables donnés à des concepts très clairs à l'origine, on pourra construire un système supplémentaire d'arithmétique, semblable en tous points à celui qui est né du concept de grandeur pour garantir ainsi les calculs mathémathiques comme par un cordon de dogmes et de définitions défensives du domaine psychologique. Une pénétration peu ordinaire peut avoir été apportée dans de pareilles constructions Seulement on pourrait aussi de cette manière inventer d'autres systèmes arithmétiques, comme cela s'est fait. L'arithmétique ordinaire est précisément la seule qui réponde au concept de grandeur linéaire ; elle en est, pour ainsi dire, la première manifestation, tandis que l'analyse avec le concept de limite en avant en forme le développement le plus élevé. Aussi ne parviendra-t-on pas à aplanir à l'aide du symbolisme ces difficultés du concept de limite, que bientôt et sans crainte nous attaquerons de front. Car tout analyste qui cache autre chose qu'un faiseur de combinaisons voudra remonter à l'origine du jeu de symboles, et alors se trouvera de nouveau placé en face des problèmes qu'il avait tournés.

Il nous faudra d'ailleurs revenir sur cette matière quand l'Idéaliste et l'Empiriste auront exposé leurs systèmes, pour montrer leur rapport au fameux système arithmétique de M. Kronecker qui paraît aussi répondre aux vues de M. de Helmholtz, comme cela ressort de deux mémoires, que ces éminents géomètres viennent de publier.

Des hommes non mathématiciens ont assez souvent cherché à éclairer les mathématiciens sur les concepts fondamentaux de leur propre science. Nous avons vu en géométrie que c'est en définitive le travail sérieux et bien dirigé des mathématiciens eux-mêmes qui a débarrassé la voie conduisant des perceptions des sens aux propositions de la science. De même la recherche la plus scrupuleuse peut seule supprimer toute discontinuité entre les concepts fondamentaux de l'analyse et notre système de représentations immédiates. C'est une question scientifique comme une autre, qui exige avec une connaissance suffisante des choses toute la puissance de travail dont nous sommes capables.

19. — Comment il faut entendre en définitive le problème qui a pour objet le concept de limite. — Les considérations qui précèdent nous conduisent donc finalement à comprendre comme il suit notre problème. — Nous avons à démontrer la proposition que voici :

Tout nombre décimal $o, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n = \frac{\alpha}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \ldots \frac{\alpha_n}{10^n}$ *s'approche autant qu'on veut qnand* n *croît suffisamment, d'une valeur limite. Sous les fractions* o, α_1 ; $o, \alpha_1 \alpha_2$;..... *il faut entendre des multiples de dixièmes, de centièmes,... d'une longueur unité dont les extrémités seraient 0 et 1. Si on porte les longueurs* o, α_1 ; $o, \alpha_1 \alpha_2$, ... *sur l'unité de longueur 0...1, à partir du point* 0, *leurs extrémités tournées du côté du point 1 vont en se resserrant de plus en plus. et le point limite ferme la suite qui se resserre indéfiniment de telle sorte que toutes les extrémités sont situées par rapport à ce point limite du même côté que le zéro, les distances des points* o, α_1 ; $o, \alpha_1 \alpha_2$; ... *au point limite tombant au-dessous de toute valeur.*

Cette *conception géométrique* du problème doit maintenant ne pas être une hypothèse, ni impliquer aucune restriction ; mais en traitant dans ce chapitre du concept de grandeur, j'ai eu précisément pour but de montrer que dans le champ si parfaitement illimité de la pensée nous ne pouvons imaginer sous la limite hypothéthique rien autre qu'une quantité linéaire représentable, ainsi, ce qui atteint très bien ce but, une longueur. Une limite numérique abstraite est une façon de parler dénuée de sens ; nous ne faisons pas tort le moins du monde à la généralité de notre recherche, quand sous la limite hypothétique nous imaginons une quantité mathématique linéaire et donnons au problème l'énoncé qui précède.

Et maintenant j'ouvre la discussion de l'Idéaliste et de l'Empiriste sur le problème proposé.

Les deux conceptions Idealiste et Empiriste de la limite et de la grandeur

Système idéaliste

L'IDÉALISTE

20. — Concept de limite. — L'existence de la limite a besoin d'une démonstration. — Je pose la longueur exacte comme fondement de la science des grandeurs, et je me représente comme unité un segment de ligne droite parfaitement délimité, dont je désignerai les extrémités par 0 et 1. Sur cette étendue, nous connaissons une foule innombrable de points déterminés de différentes manières; parmi eux il faut considérer particulièrement ces sortes de points dont nous pouvons trouver des représentants dans toute portion, si petite qu'elle soit, de la longueur unité. Ce sont les longueurs rationnelles, c'est-à-dire des demis, des tiers, des quarts, etc... ou bien des multiples de ces fractions de l'unité de longueur. Ce sont aussi les longueurs en quantité innombrable susceptibles d'être construites, qui ne sont pas des fractions rationnelles de l'unité, mais des racines de nombres rationnels ainsi que des fractions rationnelles et des multiples de ces racines. La pensée peut multiplier indéfiniment le nombre de ces espèces de points, et la longueur unité se recouvre dans notre représentation d'une foule de points de plus en plus dense. Seulement nous avons beau faire croître le nombre de ces points, notre pensée attentive ne voit jamais deux points coïncider, toujours au contraire deux points voisins restent séparés par un segment de ligne droite qui, abstraction faite de sa longueur, ressemble complètement à la longueur unité. C'est là l'image qui accompagne toujours ma représentation de grandeur.

Je ne viens de citer comme points distincts de l'étendue 0....1 que les fractions rationnelles de l'unité, ainsi que des lignes qu'on peut construire théoriquement.

Dans ce qui suit, nous considérerons ces points comme donnés et comme déjà connus, et il nous faudra tout de suite décrire

et étendre la manière dont de nouveaux points se rattachent à ceux-là. L'origine des points dont il s'agira correspond à la considération du passage analytique à la limite. Le nouveau point détermine sur l'unité une étendue qui est la prétendue *limite* c'est-à-dire le terme d'une suite d'étendues qui diffèrent de moins en moins les unes des autres.

Soit $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots$ des nombres pris dans la suite 0, 1, 2,... 9 et soit donnée pour la *suite*

$$o,\ \alpha_1\ \alpha_2\ \ldots = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + .$$

une loi qui permette de la continuer indéfiniment. Quand les α_p d'un rang déterminé reviennent périodiquement, la somme $o, \alpha_1\ \alpha_2\ \ldots \alpha_p$, lorsque p augmente, s'approche d'un certain nombre rationnel qu'on apprend à connaître dans les mathématiques élémentaires. Si on imagine maintenant portées sur l'unité de longueur 0... 1, à partir de 0, les étendues o, α_1; $o, \alpha_1\ \alpha_2$; etc.. $o, \alpha_1\ \alpha_2\ \ldots \alpha_p$; ..., elles sont elles-mêmes rationnelles puisqu'elles sont des multiples du dixième, du centième, etc... de la longueur unité ; et dans le cas de la périodicité du nombre décimal illimité, la suite précédente possède une limite L, qui est aussi représentée par un point rationnel sur l'étendue 0...1, et qui remplit cette condition que lorsque p augmente la différence $L - o, \alpha_1\ \alpha_2\ \ldots \alpha_p$ devient aussi petite que l'on veut.

Mais si la suite des α_p n'est pas périodique et que aucune des espèces de points dont nous avons admis l'existence ne contienne un point L qui remplisse la condition de limite relative à $L - o, \alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_p$, c'est alors que se place la proposition dont nous avons à nous occuper ici et qui est celle-ci : La suite o, α_1 ; $o, \alpha_1 \ldots \alpha_p$; .. etc., détermine un nouveau point sur l'unité de longueur, c'est-à-dire que cette suite l'introduit de force dans le domaine de nos représentations; le point s'appelle alors la limite de cette suite. Il n'appartient pas, par hypothèse, aux espèces de points considerés comme connus ; il est donc hors de doute que son existence doit-être démontrée tout d'abord, et son existence est et restera une hypothèse, si une pareille démonstration ne réussit pas ; c'est là maintenant ce qu'il nous faut examiner.

21. — Concept de limite. Des démonstrations de l'existence de la limite. — J'ai beau chercher, je ne vois que deux points de vue principaux pour démontrer l'existence de la limite L de $o, \alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_p$. En premier lieu le point limite L s'offre comme la limite d'une étendue, dont la longueur décroît indéfiniment et tombe au-dessous de toute quantité. En second lieu il est saisi par l'esprit comme le point de séparation de deux étendues.

Voici comment on peut exposer la première démonstration : Tout d'abord on a, pour toute valeur de p et de q,

$$o, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_q < o, \alpha_1 \alpha_2 \ldots (\alpha_p + 1)$$

parce que

$$\frac{1}{10_p} = \frac{9}{10^{p+1}} + \frac{9}{10^{p+2}} + \cdot\cdot$$

et, d'après l'hypothèse que $o, \alpha_1 \alpha_2 \ldots$ n'est pas un nombre rationnel, les α ne seront à partir d'aucun rang tous égaux à 9.

Si on construit ainsi sur la longueur unité une étendue s_p de longueur $\frac{1}{10^p}$, reliant les points $o, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p$ et $o, \alpha_1 \alpha_2 \cdot\cdot (\alpha_p + 1)$, toutes les étendues $o, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$, si grand que puisse être n, se termineront en des points situés sur s_p, de sorte que la longueur limite hypothétique L (définie par ce fait que $L - o, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$, pour les valeurs croissantes de n, peut devenir aussi petite que l'on veut) doit tomber elle aussi dans cette étendue s_p. Imaginons maintenant qu'on donne à p des valeurs de plus en plus grandes, s_p deviendra aussi petit qu'on voudra et chaque nouvelle s_p sera contenue dans toutes les précédentes. De la sorte, le point hypothétique se laisse resserrer entre des limites de plus en plus étroites. Faisons maintenant tendre l'étendue s_p vers zéro, ses extrémités finiront par se confondre en un même point et ce sera le point L hypothétique, dont l'existence se trouverait ainsi démontrée.

Il n'y a pourtant là point de démonstration, mais bien une surprise. En effet, l'étendue s_p est et reste indéfiniment limitée par des points appartenant aux espèces supposées données. Nos hypothèses nous autorisent sans doute à diminuer indéfiniment l'étendue s_p ; mais c'est là une opération de la pensée qui ne change en rien la nature de notre représentation. Grande ou petite, l'étendue s_p reste toujours une étendue comprise entre deux points rationnels. Si maintenant tout-à-coup et sans fondement logique, nous substituons à l'*étendue* un *point*, c'est là un acte par lequel nous faisons clairement et gratuitement intervenir une représentation nouvelle ; nous la laissons suivre immédiatement la première et anticiper précisément sur ce qui devait être démontré. Une rencontre graduelle de deux points, expression dont on se sert et qui semble très bien traduire le fait, est absolument un non sens. Ou bien on a des points séparés par une étendue, ou bien on n'a qu'un seul point, il n'y a pas de milieu.

L'autre méthode de démonstration est la suivante : Les points que nous imaginons donnés sur l'étendue unité se partagent en 3 catégories : 1° ceux qui finiront par se trouver couverts par les étendues que l'on porte successivement sur la

longueur 0 ... 1, savoir, o, α_1, o, $\alpha_1 \alpha_2$ ... etc ; 2° Les pointspour lesquels cela n'arrivera jamais. 3° Les points hypothétiques de telle nature qu'ils n'appartiennent à aucune de ces deux premières catégories. Il est tout d'abord facile de voir que la troisième catégorie contient ou pas de points ou un point au plus ; car on peut faire les deux remarques suivantes : 1° dès qu'un point appartient à la première catégorie, il en est de même de tous ceux qui se trouvent entre zéro et lui, et dès qu'un point appartient à la deuxième, il en est de même de tous ceux qui se trouvent entre lui et un. 2° tous les points décimaux appartiennent à l'une des catégories 1 ou 2.

Il s'ensuit qu'il ne saurait y avoir 2 points de la troisième catégorie, car on pourrait imaginer des points décimaux dans l'intervalle qui les séparerait ; ces points seraient ou non couverts dans la suite des constructions o, α_1 o, $\alpha_1 \alpha_2$ ... et il en serait de même des deux points en question ce qui est contre l'hypothèse. Ainsi la catégorie 3 ne peut contenir que *un* ou *aucun* point.

De la remarque(1) résulte maintenant que les étendues sur lesquelles se trouvent les points de l'une et de l'autre catégorie sont sans interruption de sorte que le point de 3me espèce, s'il existe, ne peut être que l'extrémité commune aux deux étendues. Mais si l'étendue unité se partage en deux portions égales telles que les points de l'une finiront par être couverts, tandis que les points de l'autre ne le seront jamais, il faut que leur extrémité commune soit également la limite hypothétique L, car ce point précisément satisfait à la condition

$$Lim\ (L - o,\ \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p) = o\ ;$$

d'où il suit encore qu'un point de 3me espèce est impossible parceque le point limite n'est jamais atteint.

Si convaincante que nous paraisse toute cette explication, elle cache encore cependant une surprise, quoique un peu moins visible que la prétendue première démonstration ; j'avouerai même que pendant un certain temps je me suis imaginéavoir réellement découvert là la preuve de la limite.

Pour caractériser d'un mot le point faible de la démonstration, elle serait absolument rigoureuse si nous élargissions encore le concept de quantité géométrique par cette proposition complémentaire « que la longueur est formée de points » Cela va tout de suite devenir clair.

Je remarque d'abord que jusqu'à la phrase qui commence par ces mots : « de la remarque (1) résulte maintenant que....» le raisonnement ne souffre aucune objection. C'est seulement la *conclusion* de la démonstration qui n'est plus satisfaisante.

Nous nous plaçons en un point d'où nous pourrons juger la valeur de pareilles démonstrations, même sans examiner les conclusions séparément, en nous attachant à ce qui peut-être démontré d'une façon générale sur le fond de notre représentation de grandeur, telle qu'elle a été donnée au début de l'exposé du système l'idéaliste.

Le concept de quantité supposé ne nous fournit rien de plus qu'une longueur précise 0 ... 1, et, sur celle-ci, des points innombrables que nous pouvons sans doute imaginer aussi resserrées que nous voudrons ; mais, comme je l'ai dit, dans tant effort d'imagination, qui correspond à un image déterminée passant devant la conscience sans le moindre nuage, nous nous représentons toujours entre deux points voisins un segment de ligne droite qui coïncide exactement suivant son étendue avec l'unité. Ce que nous avons dit des nombres décimaux, à savoir qu'ils doivent appartenir ou a la catégorie 1 ou à la catégorie 2, est vrai de toute espèce de points dont nous supposons que se composent les points donnés sur la longueur unité. Ainsi nous pouvons dire qne les points donnés appartiennent à la catégorie 1 jusqu'à un point N' inclusivement et à la catégorie 2 à partir d'un point N' inclusivement, de sorte que, en outre, N et N' sont aussi rapprochés qu'on veut l'un et de l'autre, et qu'enfin entre eux il ne peut y avoir aucun des points considérés comme donnés. Voilà, en toute rigueur, absolument tout ce qu'on peut démontrer et ce qu'a démontré le raisonnement précédent.

La surprise dès lors réside évidemment en ceci, que nous admettons des étendues déterminées par les points que l'on suppose connus, sans que les extrémités en soient données. Une étendue n'est déterminée que par ses deux extrémités. Les deux étendues en lesquelles se divise l'unité 0...1, ont certainement les extrémités 0 et 1, mais l'extrémité commune n'est pas déterminée par la première partie de la démonstration. L'une des étendues n'est précisément déterminée que jusqu'à un point N de la suite des points représentés, et l'autre à partir d'un point N' analogue. Sur la partie de ces étendues situées entre ces deux points, on ne découvre rien. Nous pourrons bien par l'imagination augmenter à volonté la densité de la suite des points. Il viendra. à la place des étendues $N \ldots N'$, d'autres étendues $N_1 \ldots$, N_1' qui sont toujours contenues dans les précédentes et tombent en petitesse au-dessous de toute limite. Mais il n'ya jamais que des étendues ; et, comme nous l'avons expressément relevé dans le premier mode de démonstration, cette façon de diminuer ne saurait rien changer à la nature essentielle de la représentation ; au contraire, le fait d'annuler l'étendue ou de la transformer en

un point est un acte arbitraire qui ne souffre pas une démonstration réelle.

Mais si nous changeons essentiellement la représentation de la longueur, et que nous la concevions non seulement comme le support de points; déjà connus, mais comme un agrégat de points si nous abandonnons cette représentation suivant laquelle ligne et point sont quelque chose de tout-à-fait différent, la critique de la deuxième démonstration croule évidemment, et il faut reconnaître à celle-ci une entière rigueur. Nous ne pouvons peut-être pas nous représenter par l'imagination tous les points dont l'étendue se compose; mais il suffit qu'ils existent réellement. Ils se décomposent toujours en deux catégories suivant qu'il leur arrivera d'être une fois ou de n'être jamais atteint, et de la troisième catégorie, il ne pourra y en avoir qu'un; mais qui, étant donné qu'un point n'a pas de longueur, n'entre pas en considération et doit nécessairement coïncider avec l'extrémité commune aux deux étendues. Car l'extrémité de l'étendue des points atteints ne sera elle-même jamais atteinte, c'est-à-dire ne touchera jamais à la limite.

On sent d'ailleurs qu'en considérant la longueur comme formée de points on suppose par cela même avant tout l'existence de toute longueur limite, et que dès lors cette représentation doit engendrer une suite d'idées toute différente de celle qui nous préoccupe ici.

Mais cette représentation n'est ni claire ni nette. On peut bien, pour l'expliquer, citer l'image d'un crayon dont la pointe trace un trait fin. Mais il y a là l'idée de mouvement, le trait est le trajectoire de la pointe mobile. La représentation de l'espace, immobile et fixe, ne fera jamais sortir l'image d'une ligne véritable uniforme d'une suite de points, si dense qu'elle soit, car des points n'ont pas de dimensions, et par conséquent une suite de points aussi dense qu'on voudra ne peut jamais devenir une distance; bien au contraire, on considérera toujours la distance comme la somme des intervalles de points.

La conception de la ligne comme suite de points répond encore à la même lacune dans la suite des idées que nous avons critiquée déjà deux fois. En effet la suite de points sur l'étendue rectiligne, avec ses intervalles aussi petits qu'on veut, est une représentation dont l'essence n'est pas changée par la diminution poussée jusqu'à l'infini des intervalles de points. Quand tout-à-coup nous supposons ces intervalles nuls, nous sautons brusquement suivant notre fantaisie et sans transition à une limite, qui cette fois non seulement n'est pas représentable, mais aussi est tout-à-fait absurde ou du moins para-

doxale. Je rejette ainsi l'élargissement duconcept de grandeur, suivant lequel la ligne doit être composée de points, la surface de lignes, etc.

Il me faut donc renoncer à une démonstration de la limite L du nombre décimal $o, \alpha_1 \alpha_2 \ldots$ fondée surles hypothèses faites au début.

C'est aussi en effet qu'on demande l'impossible, quand on veut d'une suite de points exclusivement composée de points appartenant à une catégorie donnée, faire sortir un point n'appartenant pas à cette catégorie. Pour moi la chose est tellement inimaginable que j'affirme qu'aucun travail intellectuel n'arrachera jamais à un cerveau humain une démonstration de ce genre, dût-on y supposer réunis le don de divination de Newton, la clarté d'Euler et la puissance écrasante de l'esprit de Gauss.

Toutefois il est conforme à l'intuition générale que la fraction décimale $o, \alpha_1 \alpha_2 \ldots$ indéfiniment prolongée, représente une valeur, à laquelle nous pouvons donner une forme sensible, soit à l'aide d'une longueur ou bien d'une autre quantité mathématique, par exemple, d'un poids. En effet, une foule innombrable de fractions décimales ont une limite qui peut être représentée par une longueur, et rien dans les fractions décimales ni dans les longueurs ne peut éveiller le moindre soupçon que, à l'égard d'une propriété aussi générale que la co-existence de fraction décimale et de limite, une différence entre elles soit possible. *Enfin on peut*, en tout cas, approcher autant qu'on veut de la limite hypothétique, c'est-à-dire on peut trouver une quantité L_1 telle que $L_1 - o.\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p \ldots$ pour toute valeur de p reste au-dessous d'une longueur, si petite qu'on l'ait choisie, en resserrant, comme je l'ai fait voir, la limite hypothétique dans un intervalle convenable.

22. — L'objet des considérations précédentes va être complété au sens de l'Idéaliste. — Si nous n'avons pu conclure avec nécessité, de nos représentations le point limite L, c'est que, ou bien réellement il n'existe pas, ou bien nous n'avons pas encore tiré tout le parti possible de nos représentations. Elles renferment encore des rapports que nous n'avons pas considérés, car lorsque notre représentation de grandeur est complète, et que ses liaisons avec le reste de notre système de représentations se montrent clairement, il faut que les points limites, s'ils existent, en découlent nécessairement.

Il y a, en effet, une question essentielle que nous ne nous sommes pas encore posée. Etudions encore une fois la formation de la limite L ; ce que nous avons en vue viendra aussitôt

en pleine lumière, si nous examinons les choses d'un point de vue plus physique.

Comme idéaliste, je crois à la réalité de mes idéaux, je crois à la réalité objective de mes idées poursuivies jusqu'aux limites extrêmes de ma pensée, quoique, en vérité, comme l'infini, elles ne soient pas représentables. Je crois à l'infini et à l'existence objective d'images géométriques précises ou plus correctement à leur possibilité ; car cette possibilité signifie que seules des circonstances secondaires et accessoires peuvent s'opposer à leur existence, comme on dit qu'il est possible que deux montres aillent parfaitement ensemble. Et toutes conclusions qui reposent sur de pareilles hypothèses doivent tomber dans le domaine de la possibilité, ou bien, suivant leur nature, dans celui de la réalité.

Maintenant considérons une longueur précise, non-seulement imaginée, mais existant quelque part. Les longueurs o, α_1 ; o, α_1 α_2 .... existeront pareillement, et alors, ou bien leur point limite est une réalité objective, ou bien il n'y en a point. Tout cela est indépendant du fait que dans le monde il y a ou non des cerveaux pensants ; nous n'avons donc pas à nous demander :

Pouvons nous parvenir avec nécessité, par un chemin quelconque, de nos représentations initiales à la représentation finale d'un point limite ?

Mais : *Existe-t-il, indépendamment d'un être pensant, un point limite, lorsque les étendues* o, α_1 ; o, α_1 α_2 ; .... *existent ?*

Cette façon d'envisager la question nous prescrit évidemment pour la traiter, une autre route que celle suivie tout d'abord. Nous n'avons plus le droit de poser en principe, comme nous l'avons fait au début de l'exposé du système de l'Idéaliste, les points que nous pouvons par la pensée placer sur la longueur unité, mais bien ceux qui y sont réellement.

Il se présente donc à nous tout d'abord la question du nombre de points de division qu'il faut distinguer sur l'étendue unité. Nous pouvons nous en représenter autant que nous voulons, mais combien y en a-t-il qu'il faille regarder comme distincts ? — Nous pouvons encore nous demander à un point de vue plus physique : Combien d'étendues moindres qu'une étendue donnée *existent* ou sont possibles ; c'est-à-dire, si elles n'existent pas, doivent seulement au hasard de ne pas exister?

Pour donner à cette question une réponse satisfaisante, je vais d'abord établir une distinction de la plus haute importance entre deux concepts.

23. — Des concepts de l'illimité et de l'Infini. — La quantité de points de division de l'unité de longueur ou d'étendues partielles en lesquelles se partage l'étendue unité est dite illimitée ou bien infinie. Dès que nous aurons établi exactement le sens de ces deux expressions, les questions relatives au nombre de parties d'unité et à l'existence de la limite trouveront d'un coup leur solution.

Un exemple éclaircira pour nous le sens de ces deux mots. Demandons-nous quel est le nombre des corps célestes répandus dans l'espace. Quand nous regardons de l'œil nu le ciel étoilé, quelques étoiles brillantes nous apparaissent bientôt, comme parmi les points de division de l'étendue unité, notre pensée voit d'abord les fractions rationnelles. Une observation plus exacte faite à l'aide du télescope peut nous révéler, en raison de l'intensité de lumière et du grossissement dont nous disposons, partout où semblait s'étendre une obscurité uniforme, des masses d'étoiles de plus en plus denses. Nous avons ainsi l'impression qu'il n'y a pas de limite au nombre des étoiles ; et nous disons : Les corps célestes nous apparaissent en nombre illimité. Mais à cette question « Quel est donc le nombre ? » — *illimité* ne serait certainement pas une réponse satisfaisante, parcequ'on voit toujours là par la pensée un homme qui compte et qui n'arrivera pas à la fin de son calcul, soit qu'il n'existe pas de fin dans ce qu'il compte, soit qu'il ne puisse atteindre celle qui existe.

Par le mot *infini* la plupart des gens instruits entendent que l'extension ou le nombre ainsi qualifié dépasse en réalité et indépendamment de l'existence d'êtres pensants tout ce qui peut à l'aide d'une unité déterminée se mesurer ou se compter. On dit « l'espace infini » et si on se le représente répandu partout avec les corps célestes qu'il contient, on dira aussi le nombre des corps célestes est infini. L'exactitude de cette proposition peut bien être contestée, mais à l'égard de l'expression personne n'aura rien à objecter.

L'expression « je me représente l'espace comme illimité » est inattaquable ; mais il serait impropre de dire : je me représente l'espace comme infini, parcequ'on ne peut pas précisément se représenter l'infini, qui sort du cadre de toute représentation. Il nous faudrait dire : je crois qu'il est infini.

Tout cela bien pesé, voici maintenant comment on peut résumer le rapport de l'illimité à l'infini : Nous nommons illimité en grandeur ce qui, tout en étant fini, ne peut être dépassé par des multiples de mesures fixes, parceque nous nous le figurons grandissant et sortant des confins de toute sphère.

Représentons-nous une mesure aussi grande que nous

voudrons, nous nous figurons la quantité illimitée comme la dépassant. Que la quantité illimitée soit affranchie de l'idée qui l'accompagne dans notre esprit, que celui-ci renonce à satisfaire au besoin qu'il a d'une représentation, alors de l'illimité sort le concept de ce qui est supérieur à toute quantité et ne peut plus se représenter, l'infini.

Il est de la plus haute importance de bien établir que l'illimité est toujours *fini*, et que l'infini s'applique à ce qui suit le fini dans la direction de ce qu'on suppose illimité, c'est-à-dire, à ce qui n'est pas *fini*.

La question : Quel est le nombre de points de division situés sur l'étendue unité ? reçoit donc de ce qui précède la solution suivante : *Dans la représentation, ce nombre est illimité, et par suite, dans la réalité objective, il est infini.*

24. — L'Infiniment petit et ses principales propriétés. — La proposition que le nombre des points de division de l'étendue unité est infiniment grand engendre avec une nécessité logique la croyance à l'*infiniment petit*.

En effet, nous avons établi plus haut que, selon le véritable concept de grandeur, les points ne se suivent pas les uns les autres sans intervalle sur la longueur, qu'ils ne peuvent donc se rejoindre mais sont toujours séparés par des étendues, de sorte que de simples points ne peuvent jamais former des étendues ; à leur tour les points infiniment nombreux sont séparés par des étendues infiniment nombreuses. Donc, de ces étendues aucune ne peut être finie, c'est-à-dire ne peut être contenue un nombre fini de fois dans l'unité de longueur, parce que, l'unité de longueur étant arbitraire, toute étendue si petite qu'elle soit doit-être constituée comme l'unité de longueur, et contenir aussi une infinité de points de division.

On voit donc que *l'étendue unité se décompose en une infinité d'étendues partielles, dont aucune n'est finie. Ainsi l'infiniment petit existe réellement.*

Voyons maintenant de plus près les propriétés de cette nouvelle espèce de grandeur. La propriété principale de l'infiniment petit est la suivante :

Un nombre fini d'étendues infiniment petites ajoutées les unes aux autres ne donne pas une étendue finie, mais de nouveau une étendue infiniment petite.

Il est vrai qu'on ne peut pas plus se faire une idée du domaine de l'infiniment petit que de celui du fini. On ne peut assigner de limite supérieure ni au fini ni à l'infiniment petit ; mais ce qu'il y a de sûr, c'est que, si grande qu'on puisse se figurer une étendue finie, un nombre fini de pareilles étendues

disposées à la suite les unes des autres fournit toujours de nouveau une étendue finie. Cette propriété convient aussi à l'infiniment petit, d'après son origine. Car si un nombre fini d'étendues infiniment petites donnait une étendue finie, elles ne pourraient pas toutes être infiniment petites, parcequ'il serait pour cela nécessaire qu'elles fussent en nombre infini sur une étendue finie, — d'où résulte la proposition.

Ce n'est pas sans peine que la croyance à l'infiniment petit s'impose. Cependant, si on saisit l'idée hardiment et sans préjugé, si on ne recule pas timidement devant les difficultés mais qu'au contraire on accepte les propriétés de cette nouvelle espèce de grandeur, telles que la logique les impose avec nécessité, comme quelque chose où il n'y ait rien à changer ni à interpréter, alors la méfiance première fera bientôt place à une sécurité bienfaisante grâce à laquelle on se sent tout-à-fait à l'aise dans les fondements de la science exacte, si obscurs et si litigieux qu'ils soient, et on peut prendre position d'après des principes fixes.

Celui pour qui est nouvelle la conception développée ici de l'infiniment petit trouvera bien épineuse l'extension qu'elle implique du concept d'égalité. En effet, je nomme égales deux étendues finies, lorsqu'il n'existe entre elles aucune différence finie. Cela n'empêche pas, et c'est là la difficulté signalée, qu'on peut supposer qu'elles diffèrent par des infiniment petits. Si on voit des difficultés sérieuses à cette extension du concept d'égalité, c'est qu'on n'a pas encore une vue nette des raisonnements logiques qui conduisent à l'infiniment petit. Sans doute ce concept d'égalité est contraire à l'idée qu'on s'en fait d'ordinaire, suivant laquelle la différence est absolument nulle et brave toute représentation. Mais l'essence propre de l'infiniment petit est précisément qu'il réside et doit résider en dehors de nos représentations et par suite nous ne pouvons exiger qu'à propos d'une de ses propriétés, qui peut nous paraître étrange, il s'offre tout-à-coup à nous en une représentation. Nous concluons donc :

Deux quantités finies dont la différence est infiniment petite sont égales.

En raison de son importance, je montrerai que cette proposition n'est pas en contradiction avec le concept de la quantité mathématique, tel que nous l'avons donné dans l'introduction (art. 16). Quand deux quantités de même espèce sont inégales, leur différence est à son tour une quantité mathématique de même espèce (2me propriété). Mais l'infiniment petit n'est pas une quantité mathématique de même espèce. Car s'il l'était, en vertu de la 3me propriété, on pourrait à l'aide d'un multi-

ple fini de cette différence infiniment petite dépasser toute quantité mathématique: ce qui exclut le concept de l'infiniment petit. Ainsi il n'y a entre les deux quantités aucune différence de même espèce, elles ne peuvent donc être inégales, c'est-à-dire qu'elles sont égales, en vertu de la propriété I, parceque des quantités mathématiques sont ou égales ou inégales. Nous donnons encore à la proposition la forme suivante :

Une quantité finie ne change pas si on y ajoute ou qu'on en retranche un infiniment petit.

Ces rapports une fois établis nettement entre le fini et, l'infiniment petit, demandons-nous maintenant : Comment faut-il s'imaginer l'infiniment petit ? — Car si son rapport au fini n'est point représentable, en tout cas l'infiniment petit peut en lui-même, si on fait abstraction de ce rapport, correspondre à certaines représentations. Naturellement on doit se le représenter tel qu'il prend naissance sous nos yeux, c'est-à-dire, (en tant que nous considérons la longueur comme type de quantité), comme une portion d'étendue, par conséquent comme quelque chose d'identique au fini, comme une étendue.

Et généralisant tout naturellement, nous appliquons alors tout ce que nous savons sur le partage et l'addition d'étendues finies aux mesures des longueurs infiniment petites, parceque rien dans les idées acquises jusqu'ici n'oblige à admettre pour les longueurs infiniment petites des propriétés s'éloignant du fini. Par suite

L'infiniment petit est une quantité mathématique et a de commun avec le fini l'ensemble de ses propriétés.

Quand une fois on a placé l'infiniment petit à côté du fini dans nos concepts de la réalité, il ouvre la voie à de très nombreuses et nouvelles recherches.

Il se présente, par exemple, tout d'abord la question suivante : A l'aide des conclusions précédentes, étudier l'infiniment petit dans ses rapports avec l'infiniment petit, en tirer de nouvelles conclusions et ainsi de suite. De cette façon prend naissance une suite d'espèces de quantité se succédant de telle sorte qu'un nombre fini de quantités d'une espèce ne fournit jamais une quantité des espèces précédentes.

Lorqu'on étend aux quantités d'une seule de ces espèces les propriétés des quantités mathématiques ordinaires, et par conséquent les mêmes règles de calcul que pour le fini, la comparaison des différentes espèces de quantités les unes aux autres est l'objet de ce qui a été appelé le calcul infinitaire. Ce calcul opère sur les rapports de quantités infiniment petites ou d'infiniment petits d'espèce à espèce ; et ces espèces montrent entre elles des liaisons qui échappent au concept ordinaire de

quantité. Les passages d'une espèce à une autre ne présentent pas, par exemple, la continuité de la variation des quantités mathématiques, quoiqu'elles ne donnent pas de changements brusques ; bref nous sortons ici, pour ainsi dire, de la science des grandeurs, et nous entrons dans une voie nouvelle où l'on étudie non pas les rapports qu'ont entre elles les quantités d'une même espèce, mais les rapports des espèces de quantités qui se distinguent les unes des autres à l'aide de l'infini.

Dans l'analyse ordinaire, on distingue les ordres des quantités dites infiniment petites, et on entend par là leurs puissances entières. — Les puissances fractionnaires ont les mêmes droits à être prises pour des ordres, mais les différentes espèces *possibles* d'infiniment petits, forment, comme l'apprend le calcul infinitaire, une suite de degrés beaucoup plus resserrée, semble-t-il, que celle des nombres épuisée déjà par l'ensemble des puissances de la quantité qui devient infinie. Aussi au point de vue de la possibilité d'approcher d'une valeur déterminée quelconque, la suite de degrès des ordres de l'infini possède d'autres propriétés que la suite des quantités linéaires.

25. — Le concept de limite et les nombres. — De même que nous substituons aux nombres des longueurs, de même nous substituons les nombres aux étendues partielles de l'unité.

Dès qu'on a complété par l'infiniment petit le concept de quantité, l'existence du point limite $o, \alpha_1 \alpha_2 \ldots$ est aussitôt mise hors de doute. Chacune des deux démonstrations données plus haut acquiert alors une rigueur absolue. Considérons par exemple la deuxième : les points susceptibles d'être couverts vont jusqu'à un certain point N; ceux qqi ne le seront pas partent d'un point N'. Mais l'étendue NN' est maintenant infiniment petite, tandis que précédemment il fallait la considérer comme décroissant sans limite. Acceptons donc le point N comme point limite, extremité de la longueur L : il doit en réalité satisfaire à la condition que $L - o, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p$ pour les valeurs croissantes de p tombe au-dessous de toute limite, car la différence ne peut pas rester supérieure à NN', et, puisque cette étendue est infiniment petite, elle n'ajoute rien à oN ou L

C. Q. F. D.

Inversement à chaque étendue correspond un nombre $o, \alpha_1 \alpha_2 \ldots$ si L n'est pas une fraction décimale de l'étendue lunité, a_1 est alors le plus grand multiple de dixièmes de l'étendue unité, qui soit inférieur à L, α_2 le plus grand multiple de centième, qui soit inférieur à $L - o, \alpha_1$ etc ..... cela donne naissance à une fraction décimale illimitée, dont le point limite est L.

Les points de division de l'étendue unité sont ainsi tout à fait équivalents aux nombres, y compris les fractions décimales limitées ou non. A chaque point correspond un nombre, à chaque nombre une fraction décimale de l'unité, de sorte que nous disons :

L'ensemble de tous les nombres est infini

Maintenant allons plus loin dans nos conclusions. Ici comme lorsqu'il était question de l'ensemble des corps célestes, intervient un ensemble indéfiniment grand. Les ensembles sont mesurés par les nombres entiers. Il y a donc une infinité de nombres entiers. En vérité on sera disposé au premier abord à ne tenir la suite des nombres entiers que pour illimitée, parce-qu'on pense à celui qui compte ; mais il faut encore ici séparer l'esprit qui compte du nombre lui-même. On lit quelquefois dans Gauss : *Numerus infinite magnus*, et ses expressions sont ordinairement bien pesées.

Si on s'imagine le nombre entier non pas tel qu'il est écrit dans le système décimal, mais sous la forme d'une série ordonnée suivant les puissances croissantes de 10,

$$\beta_0 + \beta_1 10 + \beta_2 10^2 + \ldots , \beta_p = 0, 1, 2, \ldots 9$$

la série infinie donne alors l'image du nombre entier infini. Il se produit ici ce fait curieux que les derniers termes du second membre, que l'on perd de vue quand le nombre quitte le domaine de la représentation, ont précisément la plus grande influence sur sa valeur. Cette circonstance présente un intérêt tout parculier. Si en effet avec le concept de l'infiniment grand, nous admettons naturellement, comme nous l'avons fait dans notre système de concepts, celui de l'infiniment petit, nous devrons le représenter numériquement par cette fraction, $\frac{\text{un nombre fini}}{\text{un nombre infini}}$. De cette façon de s'imaginer le nombre infini résulte maintenant que la forme particulière du numérateur et du dénominateur disparaît complètement de cette fraction. Car les chiffres dans le fini sont sans influence en comparaison de celle qu'ils ont dans l'infini ; et les chiffres dans l'infini sortent de la perception, et ne peuvent être indiqués, de sorte qu'en fait la valeur numérique de chaque terme est complétement laissée de côté et que l'infiniment petit apparaît comme se tenant en dehors de tout rapport numérique avec le fini.

Si donc je pense qu'il est tout à fait nécessaire de concevoir l'ensemble des nombres entiers comme infini, les nombres rationnels au contraire (nous les supposons encore compris entre zéro et un) *forment un ensemble illimité et non pas infini.* Cela est impliqué dans leur définition même qui les présente comme des fractions simples ayant un numérateur et un déno-

minateur finis. La restriction que les numérateur et dénominateur ne puissent pas devenir infinis fait que l'ensemble des nombres rationnels peut, en vérité, être supposé aussi grand que l'on veut, mais qu'il reste toujours fini, c'est-à-dire que, si grand qu'on le suppose pendant un instant, il peut toujours être dépassé par un autre ensemble fini.

L'ensemble de tous les nombres est infini, parce qu'il ne suppose pas l'existence d'êtres pensants, tandis que l'ensemble des nombres rationnels est lié à la personne qui pense, ce qui déjà est impliqué dans le caractère *arbitraire* de la grandeur qu'atteignent le numérateur et le dénominateur.

26. — Le zéro et l'infiniment petit. — La propriété de l'infiniment petit que, ajouté au fini, il ne le change pas, fait paraître tout à fait inutile une figure quelquefois incommode en analyse, le vrai zéro, qui désigne l'absence de toute quantité. Quand une variable x est assujettie à parcourir en entier le domaine des quantités réelles, on pense le plus souvent que ce domaine comprend le pur zéro; je crois que c'est une erreur. Dans bien des cas, il est vrai, il importe peu que l'on accepte ou qu'on rejette le zéro. Il peut cependant, quand on perd de vue le véritable sens des symboles, obscurcir la signification des formules, et maintes confusions sont déjà résultées de ce que parfois d'une manière purement formelle le zéro a été traité comme une quantité.

Les formes $\frac{1}{0}$, $\frac{0}{0}$ par exemple, que l'on rencontre si souvent sont absolument à réprouver, car elles manquent d'exactitude ou de sens. Elles sont en tous cas incompréhensibles pour le débutant. Le zéro doit-il être un infiniment petit, elles sont inexactes, le zéro doit-il signifier « rien » un divisé par rien est évidemment un, et rien divisé par rien demeure rien. Heureusement la tendance à épurer la mathématique de pareilles combinaisons de symboles dépourvus de sens, chose si désirable pour l'étudiant, gagne tous les jours des partisans nouveaux.

Si la variable étant supposée positive, on la fait tendre vers zéro comme cela est prescrit dans les questions de limite, et si on lui fait parcourir d'abord tous les degrés des grandeurs finies, chaque degré étant si l'on veut augmenté ou diminué à l'aide d'un infiniment petit, et que par suite on lui fasse parcourir tous les degrés de l'infiniment petit de tous les ordres x a épuisé le domaine des quantités positives Si on ajoute ces mêmes valeurs supposées négatives, x aura épuisé *tout son domaine de quantités réelles*. Le vrai zéro n'appartient pas à ce domaine, il n'est pas une quantité.

Lorsque d'ailleurs on aborde la question au point de vue psychologique, cela paraît être un acte violent de l'imagination d'anéantir une quantité mathématique indéterminée ou de variation arbitraire, et de la créer ensuite de nouveau, comme on rallume un flambeau éteint. Une quantité variable désigne une suite de représentations de même espèce ne différant que par leurs mesures numériques, et annuler ce qu'on suppose variable, c'est évidemment introduire, par un acte spécial de la volonté, une représentation nouvelle dans le concept de la quantité.

L'Idéaliste ne doute pas que le vrai zéro ne soit tout à fait inutile à l'analyse. Il est pourtant nécessaire d'insister sur ce point. On ne devrait pas dire, par exemple : $x^2 - 1$ devient nul pour $x = 1$, mais devient infiniment petit pour $x = 1$. On dirait : l^x devient 1 quand x devient infiniment petit, $\frac{1}{x}$ devient infini positif, quand u devient infiniment petit positif, et infini négatif, quand x devient infiniment petit négatif ; $\frac{1}{x-1}$ n'est bien déterminé que pour une valeur finie de x ou une valeur de x qui diffère infiniment peu de 1. Enfin on peut voir dans toute égalité $U = 0$ ce fait que U est un infiniment petit d'ordre plus élevé que les termes positifs on négatifs qui interviennent dans l'égalité $U = 0$, et qui peuvent par une addition ou une soustraction d'eux-mêmes dans les deux membres de $U = 0$ être transportés dans un seul.

Les expressions précédentes sont loin d'ailleurs d'être nouvelles, elles ont été souvent employées au contraire, mais pas toujours avec le sentiment bien net de leur portée.

27. — Quelques mots encore sur la terminologie de l'Idéaliste. — Nous suivrons encore le langage de l'Idéaliste dans les deux expressions de limite les plus connues :

1° A notre conception répond cette *façon de parler*. La valeur de $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, lorsque x devient infiniment grand, se transforme en l'irrationnelle e. De même $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$, quand x devient infiniment petit, se transforme en e. L'une et l'autre expression doivent être prises à la lettre. Cela n'aurait pas de sens de dire que $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$ tend vers e, quand x devient nul, car pour $x=0$, $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$ est un symbole dénué de sens. Dé-

signons par ε un infiniment petit d'ordre quelconque et de valeur quelconque (étant donné son ordre), on a alors en toute rigueur

$$(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}} = e.$$

2° Si Δy désigne l'accroissement de la fonction $y = f(x)$, qui résulte de l'accroissement Δx donné à l'argument, et $f'(x)$ le quotient différentiel de $f(x)$ supposé exprimable à l'aide de procédés connus, de sorte que dans l'égalité $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x) + \delta$, δ tombe au-dessous de toute limite avec Δx, nous dirons alors que δ dévient infiniment petit, quand Δx le devient lui-même, et, désignant par dx, dy et ε des quantités infiniment petites, nous écrivons

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) + \varepsilon,$$

égalité absolument rigoureuse. Non moins rigoureuse est celle-ci

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

d'après la proposition sur l'addition des infiniment petits. De même donc

$$dy = f'(x)\,dx$$

et cette égalité équivaut, d'après ce qui précède, à celle-ci : $dy - f'(x)dx =$ un infiniment petit d'ordre supérieur à dx.

Ces exemples suffiront pour caractériser les conceptions et le langage de l'Idéaliste et nous mettre à même de nous en servir correctement dans toutes les occasions.

28. — Des différentes conceptions de l'infiniment petit en mathématiques. — L'infiniment petit a acquis droit de cité en mathématiques depuis Leibniz qui l'appelait quantitas infinitésima, mais seulement comme terme scientifique. Mais Leibniz n'est pas parvenu à saisir nettement le sens de l'infiniment petit, et depuis l'apparition de ces fameuses six pages et demie dans les acta eruditorum, 1684 (*), le travail des mathématiciens

(*) Page 467—473. Introduisant la différentielle dès les premières lignes de ce mémoire, aujourd'hui encore difficile à comprendre, il dit : Jam recta aliqua pro arbitrio assumta vocetur dx.... de sorte que (et c'est ce que rend probable la figure) ici, les lignes semblent d'abord avoir été supposées proportionnelles aux accroissements différentiels, devenus plus tard d'un usage courant. Qu'on lise aussi à ce sujet les remarques préliminaires de M. C. Gerhard, Leibniz, ed Pertz, III suite. Volume V, page 215.

essentiellement appliqué aux méthodes et aux résultats du calcul différentiel n'a pas éclairci davantage le concept de la différentielle. Cette incertitude fait peu d'honneur à notre science qui d'ordinaire est donnée en modèle aux autres.

Les uns, notamment les mathématiciens du siècle dernier, ont pris l'infiniment petit tout-à-fait au sérieux : ils veulent entendre par là, une sorte de quantité extérieure au domaine commun des quantités, et qui possède une existence réelle. C'est plutôt, en vérité, un pressentiment qu'une déduction logique, comme celle que j'ai essayée plus haut, qui les a conduits à cette manière de voir.

Plus tard des analystes, qui représentent une opinion intermédiaire, considérent l'infiniment petit, non pas sans doute comme une quantité ordinaire, mais au contraire comme une quantité qui s'écoule, en mouvement vers le zéro, saisie sur le point de s'évanouir, par conséquent quelque chose comme ce que nous avons appelé illimité en petitesse.

Une troisième sorte de représentation rejette absolument l'infiniment petit, le tient pour une expression impropre mise à la place de aussi petit qu'on veut ; la quantité aussi petite que l'on veut, pouvant être supposée assez petite pour donner aux relations le degré de rigueur nécessaire. Les relations portant sur des quantités ainsi faites infiniment petites sont alors inexactes, à peu près comme celles de la physique mathématique, avec cette seule différence qu'elles sont aussi peu inexactes que l'on veut. Cependant je regrette dans notre littérature l'absence d'un développement logique de cette idée, qui dissiperait complètement à sa façon les difficultés relatives au calcul à l'aide de différentielles.

Enfin, il n'a pas manqué de mathématiciens qui n'ont pas introduit dans leurs relations l'hypothèse de l'infiniment petit comme expression littérale, et certes il ne s'agit pas là d'esprits moindres que Newton et Lagrange. Les efforts de Lagrange n'ont pourtant servi qu'à célébrer le triomphe de la différentielle qui aussitôt pénétra de nouveau à travers tous les pores de la science d'une façon si irrésistible, que l'édition de ses œuvres qui paraît maintenant adopte les notations différentielles.

L'Idéaliste se range à la première de ces quatre conceptions, pourtant il ne se fonde pas sur des pressentiments, mais au contraire sur des conclusions qu'il lui faut accepter. Autant les savants sont disposés à placer l'infini au-dessus de l'illimité dans l'espace et dans le temps, autant la plupart d'entre-eux se décident difficilement à croire à l'infiniment petit, quoiqu'il possède le même droit à l'existence que l'infiniment grand, et que même il doive s'en déduire avec une nécessité logique.

On s'éloigne peu volontiers et difficilement des grandes routes du domaine de représentations frayées par l'éducation générale de l'esprit. La vue du ciel étoilé fût-elle refusée à l'homme, le génie humain fût-il né et se fût-il dévéloppé à la façon des troglodites, dans des espaces fermés, ses savants au lieu de parcourir à l'aide du télescope les régions lointaines de l'univers se fussent-ils habitués à n'examiner que les plus petits éléments des corps à l'aide du microscope et à pénétrer ainsi par la pensée le sens de la petitesse au-delà de toute mesure, qui pourrait douter qu'alors l'infiniment petit n'occupât dans notre système de concepts la même placeque tient aujourd'hui l'infiniment grand ? — D'ailleurs, la tendance à remonter en mécanique jusqu'aux plus petits éléments agissants n'a-t-elle pas depuis longtemps introduit dans la science l'*atome*, c'est-à-dire l'infiniment petit à qui on a donné un corps ? Et les efforts qu'on fait pour le rendre inutile à la physique ne vont-ils pas avec certitude au-devant du sort qu'a eu la lutte de Lagrange contre la différentielle ?

29. — Rapide coup d'œil en arrière sur le système de l'Idéaliste. — Pour résumer finalement en peu de mots mes représentations mathématiques fondamentales, je dirai qu'elles donnent lieu à cette suite de quantités.

Infiniment petit, illimité en petitesse, fini, illimité en grandeur, infiniment grand.

Le zéro n'y est pas compris, ce n'est pas une quantité. Parmi ces quantités, sont réelles et indépendantes de l'existence d'êtres pensants : l'infiniment petit, le fini, l'infiniment grand. La représentation de l'illimité est liée à l'existence d'un être qui pense, ce n'est pas la représentation d'une quantité fixe immobile, elle renferme au contraire l'idée d'un mouvement au-delà de toute borne, dans lequel notre pensée suit inséparablement la quantité qui croît ou décroît, celle-ci est donc toujours finie.

La pensée idéaliste suppose un monde qui, non seulement correspond en quelque manière à nos représentations, voire même à nos intuitions et à nos concepts les plus abstraits, mais qui possède encore par delà nos représentations un contenu réel et dont nous avons profondément conscience, malgré l'impossibilité pour nous de nous le représenter. Ainsi l'idée que la plupart des hommes se font de l'univers est tout d'abord celle d'un espace, qui, comme espace a, il est vrai, des dimensions, mais dont l'étendue échappe à toute représentation. L'Idéaliste, pour désigner les dimensions véritables de l'univers, comme pour le nombre des parties de la quantité mathémathique, emploie un mot qui ne veut pas dire que *nous*

ne pouvons pas mesurer ces dimensions, compter ce nombre, mais que ces dimensions et ce nombre existent réellement, quoique non mesurables à l'aide de mesures finies, ce mot est *infini*. Les parties de la quantité finie devant être en nombre infini, chacune doit être infiniment petite.

De là il résulte premièrement que toute fraction décimale illimitée $o, \alpha_1 \alpha_2 \ldots$ a pour limite fixe une grandeur mathé-mathique, deuxièmement qu'il y a une infinité de quantités numériques $o, \alpha_1 \alpha_2 \ldots$

Pour ce qui touche à l'infiniment petit, il donne lieu à des ordres infiniment variés. Si on reste dans le même ordre, il se compose comme une quantité mathématique ordinaire, et un infiniment petit ajouté à un infiniment petit d'ordre moindre ne le change pas. Le fini correspond à l'ordre zéro.

La conception fondamentale de l'Idéaliste est donc l'existence réelle non seulement de ce qui est l'objet de nos représentations mais encore des intuitions qui résultent involontairement de nos représentations. Dès que nous les tenons pour existantes, il nous est permis de nous demander quelle est l'essence de ce qui se dérobe à nos perceptions, et dont l'existence s'impose à nous comme celle des dimensions réelles de l'univers ; et cette question ne peut recevoir d'autre réponse que celle donnée par nous.

Critique du Système de l'Idéaliste faite par l'Empiriste

L'EMPIRISTE

30. — De la fraction décimale illimitée qui se développe suivant une certaine loi, et de celle dont le développement n'a pas de loi. — Ma manière de comprendre les concepts fondamentaux des mathématiques se distingue de celle de l'Idéaliste par ce fait qu'elle se refuse à dépasser les limites du domaine naturel de représentations. Je crois que nous ne sommes pas autorisés à admettre et à faire entrer dans les raisonnements mathématiques des choses dont nous n'avons ni ne pouvons avoir une représentation. Partant de là, je combattrai quelques hypothèses essentielles du système idéaliste, mais tout d'abord je voudrais bien obliger l'Idéaliste à poursuivre ses vues sur les parties en lesquelles se partage l'étendue imitée jusqu'à des conséquences qu'il n'en a pas encore tirées. C'est pourquoi je vais pour le moment admettre la valeur des concepts de l'illi-

mité et de l'infini tels qu'il ont été distingués par l'Idéaliste et étudier la nature d'une fraction décimale qui se continue sans fin, au point de vue de son développement illimité.

L'Idéaliste conclut à sa manière que déjà l'ensemble des nombres entiers, à fortiori celui de tous les nombres est infini. Cette logique conduit à un résultat singulier. Considérons une fraction décimale < 1, de la forme

$$o, \alpha_1 \alpha_2 \ldots = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \ldots$$

Une formule, une loi, suivant laquelle on fera le développement, étant nécessaire pour qu'on puisse le continuer à l'infini, la suite illimitée et sa loi sont des concepts en quelque sorte identiques. Enfin une opération infinie sans formule suivant laquelle on doit la continuer est une contradiction in adjecto. Car, si par infini on entend que le développement se sépare de l'esprit humain pour continuer tout seul sa route vers l'infini, il faut bien, si le développement doit se faire d'une manière déterminée, qu'on donne une formule avec laquelle il fasse son chemin : cette correspondance de la suite et de la loi implique aussi que la loi est déterminée par la suite, bien que, par sa nature, ce rapport ne s'impose pas aussi nécessairement que le rapport inverse. Soit à notre disposition un nombre quelconque de termes de la suite $o, \alpha_1 \alpha_2 \ldots$, on peut imaginer qu'un esprit d'une pénétration suffisante pourra toujours en déduire la loi de succession, parce qu'elle est nécessairement *déterminée* par la suite *illimitée* des α.

Or quelle peut-être la nature de pareilles lois ? — Une loi particulière contiendra un nombre quelconque de quantités arbitraires. Par exemple le nombre $Z = o, \alpha_1 \alpha_2 \ldots$ devra se calculer par la formule $Z = a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2 + \ldots$ où les a désignent des nombres arbitraires en quantité illimitée, les μ des nombres donnés. Si donc avec l'Idéaliste je m'informe du *nombre* de pareilles lois, je suis obligé de me répondre qu'il est infini ; car la forme de la loi est donnée d'avance, elle est donc désormais indépendante d'êtres pensants, et par suite, d'après la manière de raisonner de l'Idéaliste, il ne reste pas d'autre réponse possible. Or si le nombre des quantités arbitraires a, illimité dans la représentation, est en réalité infini, il s'ensuit qu'il en est de même des quantités α, en un mot, la suite entière $o, \alpha_1 \alpha_2 \ldots$ est arbitraire et, jusqu'à l'infini, n'est soumise à aucune loi. Que ses chiffres soient exposés en nombre quelconque aux yeux de l'homme le plus pénétrant, il ne pourra rien dire de certain sur leur succession.

Bref, ce ne seraient pas là des *nombres*. Il n'est permis, en effet, à la pensée humaine d'user de ce mot que pour des parties

de l'unité exprimables en nombres et pour des parties qui, sans être ainsi exprimables, sont pourtant déterminées par la loi de succession des chiffres.

Ainsi donc les suites éternellement dépourvues de lois ne sont pas des nombres. Correspondraient-elles à des quantités ? Oui sans doute au sens idéaliste. — L'Idéaliste les suppose continuées jusqu'aux termes les plus éloignés $\frac{\alpha}{10^{\infty}}$, qui sont des infiniment petits. Ceux-ci d'après ses définitions ne changent en rien la somme des termes précédents, et par suite il correspond à la fraction décimale infinie, quoique sans loi, un segment de l'unité. Il doit alors conclure que l'unité une fois bien fixée, il existe des portions sans nombre de cette unité qui ne sont pas exprimables en nombres.

L'IDÉALISTE

Je suis armé contre de pareilles conséquences tirées de mes hypothèses fondamentales, elle ne m'embarassent nullement. L'empiriste conclut à bon droit que je dois admettre des suites de nombres ne pouvant jamais fournir de loi pour leur succession et, cependant, marchant vers l'infini. Cela certes n'est pas représentable, pas plus que l' « infini » et l' « éternel ». Les nombres non exprimables sont une conséquence nécessaire de la conception qu'ont la plupart des hommes de l'essence des choses, au même titre que l'infinitude de l'espace et l'éternité du temps.

La limitation du nombre des fractions décimales possibles par les lois qu'exigent les opérations infinies n'est évidemment pas contenue de prime abord dans le concept de toutes les suites infinies formées de nombres quelconques *o*, 1, 2, . . 9, écrits les uns à la suite des autres, elle a été au contraire ajoutée à posteriori par la spéculation. Si on part de la représentation de quantité, toutes les longueurs moindres que l'unité sont, dans la représentation, de même nature. Soit donné l'unité et une longueur plus petite : Si on détermine par des mesures le rapport de celle-ci à l'unité, on posera pour l'exprimer un chiffre décimal après l'autre; on pourra, dans l'hypothèse d'instruments suffisants, poursuivre cette occupation aussi longtemps qu'on voudra, et développer ainsi empiriquement une fraction décimale illimitée. Rien pourtant dans cette formation d'une fraction décimale n'exige une loi qui règle l'ordre des chiffres. Par le rapport rigoureux des deux longueurs, la fraction décimale infinie est parfaitement déterminée sans

qu'aucune règle ait besoin d'exister, qui permettrait par exemple, étant donnés les N premiers chiffres, de calculer n'importe quel autre à partir de là.

On pourrait aussi imaginer le mode suivant de formation d'un nombre qui continue jusqu'à l'infini sans aucune loi. Chaque chiffre est simplement joué aux dés. Comme on peut admettre qu'on ait jeté les dés de toute éternité et qu'on les jette dans l'éternité à venir, un nombre sans loi prend aussi naissance dans notre pensée. Toutefois la considération de la nature nous fournit de meilleurs exemples.

Incontestablement beaucoup de constantes de la nature sont déterminées de toute éternité par l'état de l'univers. La température de l'espace, ses constantes optiques, avant tout son potentiel, le sont certainement. Du potentiel et de quantités semblables on peut dire qu'elles sont déterminées par la totalité des masses répandues dans l'espace ; sous l'hypothèse, il est vrai, très contestable que les forces issues d'un point produisent partout leurs effets en même temps. Mais les autres constantes de l'espace sont engendrées par tout ce qui *est* et *a été* dans l'espace. Par exemple, la température de l'espace est le résultat de tous les états de l'infinitude de l'espace et de l'éternité du temps. Supposons la matière finie, limitée quelque part dans chaque direction, et soit donné son état à un instant quelconque, l'expression en nombres de ces constantes naturelles doit conduire à une loi. Mais supposons la matière infinie : une constante comme la température de l'espace dépend alors d'actions qui ne doivent nécessairement se limiter à aucun rang décimal. Si on prolongeait la suite des chiffres par une loi de formation, cette loi contiendrait l'histoire et l'image de l'éternité du temps et de l'infinitude de l'espace. Comme on le voit, des considérations physiqnes de cette espèce fournissent déjà l'existence de nombres irrationnels sans loi. Au point de vue d'ailleurs des limites de pareils nombres, mes considérations s'appliquent sans changement, puisque dans ma démonstration de l'existence de la limite, je n'ai fait usage d'aucune loi. Je pourrais, ayant en vue les exemples précédents, appeler empiriques les nombres irrationnels sans loi, pour les distinguer de ceux dont le développement a une loi et qui pourraient s'appeler analytiques.

L'EMPIRISTE

J'apprécie très bien la solidité de ce développement des principes idéalistes. J'ai voulu seulement montrer, par un exemple entre mille, comment la conception de l'Idéaliste, dès

les premiers éléments, franchit déjà de toutes parts les bornes de l'entendement humain au lieu de resserrer et de simplifier les principes de la science. Une telle exubérance de la pensée est peut-être pour l'Idéaliste une qualité louable, tandis que pour moi elle serait inquiétante. Je ne pourrais me sentir à l'aise malgré toute la rigueur de ses conclusions, dans une science dont les branches pénètrent si souvent dans le monstreux et l'insaisissable.

31. — L'hypothèse fondamentale de l'Idéaliste est mise à nu. — Je porte maintenant mon attention sur les hypothèses de la théorie idéaliste.

Elle repose sur une prétendue représentation, près de laquelle on passe d'ordinaire sans faire attention et qui cependant peut-être considérée plus que toute autre comme l'origine véritable de toutes les obscurités et difficultés de conception, dans les principes non-seulement des mathématiques, mais aussi des sciences physiques exactes. Cette représentation est précisément aussi peu réelle que celle de l'infiniment petit qui en résulte. L'hypothèse initiale sur laquelle l'idéaliste insiste à peine est *l'existence de la mesure exacte*. Elle sert de fondement à toutes ses considérations et conclusions. De la représentation de longueur exacte il déduit l'infiniment petit, qui lui sert à démontrer l'existence de la limite, puis son échelle infinitésimale des différentes espèces de quantités. Il a recours à cette représentation pour rendre intelligible la formation d'une fraction décimale se poursuivant sans loi jusqu'à l'infini. Enfin, il se fonde sur une température exacte, celle de l'espace, pour rendre vraisemblable l'existence effective de pareils « nombres empiriques. » Laissons de côté la température qui est une représentation très complexe, l'Idéaliste rattache ses conséquences les plus importantes au concept de la *longueur exacte*, et à l'identité de nature de la longueur et de ses parties aussi petites que l'on veut, d'où il déduit ensuite le sectionnement brusque d'une ligne, le partage à l'infini, et tout le reste.

C'est ici même, à propos de la mesure exacte, que nos chemins se séparent. Je tiens cela pour imaginaire, insaisissable, bref pour un mot vide. Pour éviter une fausse conception de ma manière de voir, je vais tout de suite mettre en évidence le point dont il s'agit. Je ne nie pas la représentation de l'exact, mais le *concept scientifique* de quantités géométriques exactes, nous ne l'avons pas, ni ne pouvons l'avoir.

Nos perceptions et représentations géométriques ne sont pas inexactes, quand notre organe fait son devoir. Avec de jeunes yeux nous voyons au loin des champs de neige se détacher du

ciel avec les contours les plus nets, et quand plus tard devenus myopes, il nous arrive d'avoir été pendant quelque temps privés de lunettes, le premier regard jeté sur des formes limitées avec précision nous fait éprouver une vive jouissance. On est pleinement satisfait par cette certitude, parce que les perceptions ne nous en font pas connaître de plus grande, et que par suite, on ne peut imaginer une plus grande certitude que, l'impression sensible que nous produisent les lignes de séparation. Ce sont d'ailleurs essentiellement les perceptions elles-mêmes et les représentations toutes fraîches, installées depuis peu dans la mémoire, qui suffisent à engendrer l'image de délimitations exactes comme les autres images de la mémoire. Si elle ne se rafraîchit pas, elle perdra avec le temps de sa précision. Lorsque réfléchissant sans l'aide d'objets sensibles nous voulons nous représenter des images géométriques exactes avec une fraîcheur au moins approchant de la fraîcheur primitive, cela nous coûte (*) quelque effort. Mais ce qui nous reste et ne peut périr comme une image, c'est le concept de l'exact dans la *perception sensible*. Il s'attache à son signe : le mot.

Ce concept nous continuons ensuite à le développer inconsciemment jusqu'à en faire le concept de *l'exact idéal*. Voici à peu près ce qui se passe. Une expérience journalière apprend que des lignes droites qui paraissent exactes, comme les arêtes des maisons vues de loin, examinées de plus près, montrent une forme irrégulière, et que d'autres lignes droites gardent cette apparence, même observées au microscope. Nous possédons assez d'exemples d'images géométriques citées pour parfaites, lignes, arêtes, surfaces, construites par des procédés

(*) En m'observant moi-même, j'ai eu cette impression que je travaille, pour ainsi dire, à l'aide de deux formes de représentations, l'une plus grossière, l'autre plus fine, comme d'autres auront fait sur eux-mêmes des observations analogues dans d'autres domaines scientifiques. S'il faut un certain effort pour se représenter des images géométriques avec toute la précision des perceptions primitives, l'effort repété surtout dans nos jeunes années en vue de purifier nos concepts d'espace, en particulier, nos concepts mécaniques, et les développer sous une forme de plus en plus abstraite, cet effort, dis-je, renforcera notre aptitude à un semblable travail de la pensée, mais non pas notre goût pour ce travail. C'est ainsi que plus tard on craint de préciser certaines abstractions mécaniques, parce qu'on sent très bien l'infécondité de ses efforts. Dans le travail ordinaire de ma pensée, ce sont des images imparfaites de points, lignes, surfaces, qui s'offrent à mon esprit, lorsque, par exemple, dans l'étude d'un problème géométrique, j'interromps ma lecture pour soumettre à une analyse les représentations auxquelles je suis arrivé. Je me suis ordinairement représenté des figures sur le tableau ou des images stéréoscopiques.

mécaniques, qui montrent une exactitude absolue, les unes à l'œil nu, les autres à l'œil armé du microscope. On voit donc que : Nous possédons la représentation de *l'exact sensible*, et en outre de l'exact défiant la délicatesse la plus extraordinaire de nos moyens de contrôle. De là naît une suite d'idées dont les conclusions dominent notre systèmede concepts dans toutes les directions ; là où une suite sans fin de représentations n'a pas une représentation pour limite, l'analogie des suites innombrables de représentations qui aboutissent à une représentation limite fait que nous supposons malgré nous une limite là où elle manque. Mais comme elle ne répond pas à une perception réelle, elle ne peut être en tant que représentation une image d'objet ; c'est tout simplement une *représentation de mot*, et elle vient s'ajouter à notre système de concepts comme le concept de quelque chose de réel, de représentable. Voila en peu de mots l'origine de ce que je pourrais appeler l'Idealisme commun à tous les hommes, et de toute la métaphysique. C'est un phénomène essentiellement inconscient qui se passe non seulement chez l'être individuel, mais encore dans l'espèce. (*) Ainsi nous croyons, sans l'avoir vu, à la possibilité de l'exact parfait, ou mieux, nous n'y réfléchissons même pas. Il appartient comme beaucoup d'autres concepts analogues, et sans donner lieu à aucune discussion, au système de concepts de l'homme ordinaire.

31. — L'idée de la mesure exacte est soumise à la critique de l'Empiriste. — Ainsi, c'est sans le savoir que nous sommes idéalistes. Mais au point du vue *scientifique* nous devons pouvoir rendre compte de nos hypothèses et de nos concepts fondamentaux, et n'accepter inconsciemment aucun point d'arrêt. Notre problème scientifique consiste donc à revenir sur l'idée de l'exact et à la comparer à la réalité ; il nous faut rechercher si la limite pour laquelle nous avons un mot dans notre système de concepts, répond à ce qui existe. Ainsi se pose la qnestion : Sommes nous fondés à reconnaitre la réalité objective des idéaux géométriques ? c'est donc la question relative au concept de la mesure exacte, pour l'examen de laquelle il suffit évidemment de songer à la mesure exacte de longueur, c'est-à-dire à l'étendue rectiligne.

(*) Ce n'est pas ici le lieu d'analyser avec plus de soin cette marche à peine esquissée de notre pensée, et de l'éclairer de nombreux exemples ; c'est ce problème que se pose un ouvrage déjà annoncé et qui paraîtra immédiatement après celui-ci. D'ailleurs, depuis que ce passage a paru en allemand, l'extrême importance du processus qu'il décrit, pour comprendre l'origine de ce que l'on appelle métaphysique, a déjà étéremarquée.

Dans l'image sensible de la ligne droite limitée, on distingue trois impressions : 1° C'est une ligne; 2° C'est une ligne droite; 3° Elle commence brusquement, se termine brusquement. Nous allons cependant examiner les deux premiers caractères en même temps.

D'aucune forme de la nature nous ne pouvons dire avec *certitude* qu'elle est une ligne droite exacte — avec un commencement et une fin brusques. On ne peut le dire du trait ni du fil, qui ont tous deux une épaisseur, ni de même du rayon de lumière, qui, comme le dit Newton, *a des caprices*, ni de l'arête aiguisée qui présente toujours nécessairement des déviations de la grandeur de grains de poudre à aiguiser ; mais des considérations physiques nous obligent encore à regarder comme s'éloignant par de continuels écarts, quelque petits qu'ils soient, de l'image géométrique idéalement exacte, toutes les arêtes et surfaces planes préparées d'une manière aussi parfaite que possible, les arêtes de cristal formées tout fraîchement et dans les meilleures conditions, la surface des liquides capillaires, les bords de la goutte flottante, etc... Car on ne pourra supposer pour aucune substance susceptible de changer de volume, de se combiner, de s'échauffer, de s'électriser, ou qui est composée d'atomes chimiques, qu'elle remplisse l'espace d'une manière rigoureusement uniforme. Toute portion d'espace, si petite qu'elle soit, qu'offre une pareille matière renfermera des différences dans sa composition, de sorte qu'en définitive, dans le monde qui s'offre à nos sens, toute ligne si régulière qu'elle paraisse se présentera sous un grossissement suffisant, comme un objet étendu dans le sens de la longueur, avec des torsions et des épaississements sans nombre. Sur de pareilles bases on ne peut fonder l'hypothèse des extrémités exactes d'une longueur.

Mais ce qui importe au plus haut degré, c'est que même s'il y avait dans la nature des lignes droites exactes, nous ne pourrions jamais le reconnaître. Car le caractère de la ligne droite est pour nous un caractère indirect. — Il exige que de l'image certaines perceptions disparaissent. Par exemple si on fait tourner une droite entre deux points fixés sur elle-même, l'aspect de cette ligne ne doit subir aucun changement, et nous pouvons ici imaginer que nous nous déplaçons autour de la droite de telle façon que deux de ses points tombent toujours aux mêmes points de la rétine. Si on se représente la ligne droite illimitée, ou bien qu'on fasse abstraction de ses extrémités, on ne fait qu'exprimer autrement le criterium de la droite en le trouvant dans cette condition que, contrairement aux autres images géométriques, elle est déterminée par deux points, tandis que trois points sont nécessaires pour fixer dans

l'espace d'autres figures géométriques. Pour l'arête cela signifie physiquement que si elle court entre deux enchassures son image microscopique ne doit pas être changée, pendant qu'elle se déplace sur sa direction.

Or, étant donné que tous les instruments nous permettant d'observer les déviations dont la non existence caractérise la ligne droite, d'après n'importe quelle définition, sortent de la main des hommes, personne ne croira qu'ils permettent jamais de mesurer des déviations aussi petites que l'on veut. Mais même si nous avions reçu nos appareils de mains divines, et qu'ils fussent doués d'une puissance merveilleuse, ils ne nous permettraient jamais, en présence d'une ligne droite parfaite, de la reconnaître comme telle ; car par la mesure, il faudrait établir que certaines déviations ou plus généralement certaines quantités dont l'existence est possible n'existent pas, qu'elles sont au contraire rigoureusement nulles. Mais cette démonstration exige que les procédés optiques, mécaniques ou de n'importe quelle nature donnent un grossissement *infini au sens idéaliste;* le grossissement devrait être sans limite, ce qui, de quelque façon qu'on le tourne, est inimaginable pour l'homme. Mais enfin, il s'agit non de de la possibilité de procédés parfaits de mesure, mais de la possibilité pour nous de nous convaincre de leur exactitude ; il nous faudrait pouvoir contrôler les appareils. Or, pour que nous ayons le droit de nous en fier à notre contrôle, il nous faut des appareils de contrôle faits d'une substance bien connue, fabriqués à l'aide de procédés techniques qui nous soient familiers, de sorte que nous puissions en apprécier la sûreté. Une pareille appréciation ne pouvant jamais nous fournir qu'une certaine quantité d'exactitude à cause de l'inexactitude de nos sens et de nos procédés, nous en sommes toujours au point de départ. On le voit : à la connaissance humaine échappe en toute circonstance l'exact absolu, si nous n'admettons rien de certain en dehors des combinaisons auxquelles aboutit notre système de représentations.

L'étendue rectiligne idéale n'est donc que la fin admise arbitrairement d'une suite de représentations de mesures toujours plus précises, mais d'une suite pour laquelle on ne peut démontrer l'existence d'une fin. Dans le monde tel qu'il s'offre à nos perceptions, rien ne parle en faveur de l'existence de l'idéal géométrique, bien plus, tout parle contre.

Que reste-t-il après ces réflexions du système de l'Idéaliste?

L'unité de longueur, si par exemple nous ne songeons qu'à ses extrémités, n'a ainsi scientifiquement qu'une *exactitude arbitraire* ; elle n'est qu'une représentation oscillant entre des différences aussi petites que l'on veut, comme un étalon,

c'est-à-dire une mesure fondamentale, construite avec toutes les précautions scientifiques dont dispose une époque. Les parties de l'unité de longueur sont évidemment toutes soumises à la même inexactitude qu'on peut supposer restreinte autant qu'on veut. On pourra se représenter de pareilles parties en quantité innombrable sur chaque étendue, si petite qu'elle soit, précisément parceque l'inexactitude diminuée autant que l'on veut permet de pousser la division d'une étendue aussi loin que l'on veut. Mais la poursuite de cette division, quand on ne l'arrête nulle part, finit par se perdre dans le vague flottant. La pensée peut pousser cette division aussi loin qu'elle veut, ce travail n'a pas pour effet de donner l'infiniment petit, mais bien de fatiguer et de décourager l'esprit qui ne voit pas de fin à sa marche en avant dans une région uniformément nuageuse.

Les sciences mathématiques n'ont d'ailleurs évidemment pas besoin de l'exactitude parfaite des représentations géométriques. Pour la science qui pourrait les exiger au plus haut titre, la géométrie, il suffit en général de la précision des lignes droites de la nature, si on songe qu'on peut se représenter les lignes droites aussi longues que l'on veut, de façon à rendre aussi petites que l'on veut, par rapport à la longueur, les inexactitudes inévitables, moléculaires pour ainsi dire. Comme points nous avons dans les étoiles fixes qui apparaissent comme des points, même avec le plus fort grossissement, un exemple qui donne satisfaction à notre besoin de rigueur, et le faisceau de rayons qu'envoie dans notre œil une étoile fixe est certainement aussi une ligne droite sufisant à toutes les exigences de la géométrie.

La conception empiriste, en me conduisant ainsi à ne voir dans la mesure exacte qu'un produit verbal de la pensée, en dehors de toute réalité, à déclarer même que, eût-elle une réalité, nous ne pourrions le reconnaître, me fait rejeter ce concept comme fondement du système de concepts mathématiques. Il me faut aussi écarter les conclusions de l'Idéaliste, dont l'unique fondement était l'idée de la longueur exacte, ainsi sa théorie de l'infiniment petit, et, avec elle, la démonstration qu'il en déduisait pour l'existence d'une limite de nombres irrationnels, ainsi que cette limite elle même. Cependant si je nie cette limite de fractions décimales sans fin irrationnelles, je dois ajouter qu'à mes yeux il ne peut être question non plus de limite de fraction rationnelle sans fin, comme de valeur idéalement exacte.

Si nous voulons nous mettre à l'abri des produits de la pensée tels que l'infiniment petit de l'Idéaliste avec ses propriétés étranges, nous ne pouvons pas quitter le domaine des repré-

sentations réelles de l'bomme, car nos lois de pensée, c'est-à-dire les filiations naturelles de représentions sont abstraites du monde des phénomènes dans le cours du développement de l'espèce humaine, et il n'est pas vraisemblable quoique possible qu'il survienne du nouveau, qui soit en contradiction avec nos formes de pensée les plus familières, comme par exemple le concept d'égalité élargi par l'Idéaliste l'est avec le concept généralement admis. En conservant dans la pensée des concepts qui correspondent à la non réalité, au pressentiment, on donne lieu à des paradoxes multiples auxquels aboutit l'Idéalisme dans tous les domaines de la pensée.

L'IDÉALISTE

32. — L'existence de la mesure exacte est fondée par la théorie de l'Idéaliste. — La principale objection que l'Empiriste fasse à mon système est la non réalité de la mesure exacte prise pour base de nos opérations logiques.

Or, qu'une ligne droite exacte ne puisse vraisemblablement être composée avec la matière dont sont formés les corps de nous connus, je l'accorde sans restriction. Je crois aussi que même si nous tenions dans les mains un prisme absolument exact, nous ne pourrions savoir par aucun moyen qu'il n'a pas de défauts.

Seulement toutes nos représentations scientifiques sont ainsi pénétrées des idéaux géométriques, la mesure exacte se trouve si bien dans la pensée de tous, que ce n'est que l'intelligence critique qui y voit un idéal, c'est-à-dire quelque chose qui n'appartienne pas au domaine de la perception, et la justification de son admissibilité, au contraire, étonnera l'homme impartial. Il demandera depuis quand la distance de deux points a besoin d'être éclaircie comme concept exact, ce concept si familier à tout écolier. Un mode d'intuition aussi profond et aussi généralement enraciné, n'est pas commode à extirper, et on réussirait peut-être mieux à vouloir l'établir scientifiquement qu'à vouloir l'éloigner. Car la pensée qu'il n'y a pas dans le monde de mesure exacte troublerait tellement ceux qui réfléchissent à la stabilité des choses, qu'ils finiraient par retourner à la croyance aux idéaux géométriques. Dans toute combinaison de quantités, d'où l'on voudrait déduire quelque chose, on aurait des remords. Les idéaux géométriques pourraient sortir de la marche suivante de la pensée, et en tirer leur raison d'être scientifique.

Des représentations multiples du monde des phénomènes, le concept de l'espace est l'abstraction dernière. L'espace est

un caractère commun aux représentations de tous les sens, particulièrement de la vue, du toucher et du sens musculaire.

Des objets placés l'un à côté de l'autre, l'un devant l'autre, l'un derrière l'autre à des intervalles comparables, le mouvement relatif de l'objet perçu et de celui qui perçoit, tout cela laisse comme résidu ce qu'on appelle concept de l'espace. Par la pensée nous nous supposons en mouvement dans l'espaee nous et les choses ; d'autres se mettent à notre place, de sorte que le contenu de l'espace finit par devenir accessoire dans notre représentation. C'est-là l'origine de l'abstraction de l'espace vide qui est d'une nature tout-à-fait scientifique. Pour ce que nous avons en vue, il suffirait de nous reporter à la représentation d'espace homogène, qui a été abstraite des perceptions des corps liquides et transparents. Cependant l'esprit scientifique met en doute l'homogénéité de ces corps naturels, de sorte que nous sommes obligés de nouveau d'en revenir à l'espace vide pour en faire le fondement de nos considérations.

La représentation d'espace vide est sans doute une limite de représentations réelles, mais on ne peut dire si elle est réelle elle-même, c'est-à-dire s'il y a ou y aura un espace dans lequel les corps se meuvent exactement suivant la loi de l'inertie, qui ne laisse passer aucun rayon de lumière, dans lequel aucune force ne pénètre, bref, si grâce aux acquisitions que l'avenir réserve à la physique, à côté des machines pneumatiques, il y aura les pompes destinées à supprimer les impondérables. Pour ceux qui considèrent le monde matériel comme limité ou comme formé d'ensembles isolés, l'espace vide est même encore une conséquence nécessaire de leur conception. Dans tous les cas, je pourrai donner l'espace vide comme fondement à mes considérations, car toute chambre est l'image, la représentation réelle d'un *espace* et comme je peux retirer en grande partie ce que elle contient, supposé que je dispose de moyens suffisants, j'ai la représentation de cet espace vidé de tout ce qu'il contient de matériel, limite toute naturelle de nos représentations réelles, et la science devrait renoncer à beaucoup, si elle se refusait à admettre cette limite. Je pars ainsi de l'espace vide ou plus généralement de l'espace homogène.

Evidemment dans tout espace vide non seulement on peut introduire par la pensée des figures sans nombre, mais encore elles y sont réellement. Dans ce bloc de marbre est taillé notre portrait, puisque le sculpteur peut avec son ciseau et suivant son talent atteindre une ressemblance plus ou moins grande. De même j'affirme que dans cet espace que j'imagine homogène comme l'air l'est pour nos sens, ou bien vide, toute figure de

forme précise non-seulement peut-être supposée mais encore est contenue réellement. Si j'imagine une sphère ayant un certain point pour centre et dont la surface passe par un second point de quelque façon que soit choisi le système des deux points il existe dans l'espace une pareille sphère, absolument comme dans le bloc de marbre d'où on peut la faire sortir avec le ciseau. C'est une représentation si naturelle qu'elle est claire même pour l'enfant. (*)

Mais on n'a pas besoin de faire appel à l'imagination pour s'assurer de l'existence de l'exact géométrique. L'étude des éléments derniers des corps conduit au même résultat. Quelque représentation qu'on se fasse de la matière qui remplit l'espace que ce soit un système de points agissant à distance les uns sur les autres, ou bien une matière homogène et continue (logiquement on ne saurait faire une 3me hypothèse car l'idée d'une matière hétérogène répugne à l'esprit jusqu'à ce que, l'ayant décomposé, il l'ait ramenée à des représentations d'espace homogène ou d'espace sans contenu), la pensée qui analyse doit toujours aboutir à des images exactes. Suppose-t-on la matière homogène, il faut qu'elle ait toujours des limitations de quelque espèce, qui forment avec toute la précision désirable la fin d'un corps homogène et le commencement d'un autre. Mais l'esprit ne trouve pas sa satisfaction dans la matière homogène et continue, il la décompose et la ramène à ses éléments formels vides de tout contenu, agissant à distance les uns sur les autres ; alors ces éléments, pour atteindre la limite de la pensée, doivent être saisis tout simplement comme des images exactes, comme des surfaces, des lignes, des points idéaux. Si on veut s'en tenir aux points, leur distance est une ligne droite qui a tout au moins des extrémités exactes, et c'est là l'hypothèse fondamentale du système idéaliste.

C'est à mes yeux même comme un contre sens de ne vouloir admettre que des formes non exactes. Quel avantage a donc une certaine inexactitude sur l'exactitude ? — Cette certaine inexactitude n'est-elle pas nécessairement exacte dans ses contours, de sorte qu'on trouve forcément l'exact dans l'inexact ? Il nous faudra pourtant bien accorder à l'idéal géométrique le même droit à l'existence qu'à n'importe quelle caricature de l'idéal !

Ainsi les hommes sont certainement idéalistes. Pourquoi donc se donner tant de peine pour se convaincre d'un doute sur l'évidence des idéaux géométriques, s'ils ne parviennent

---

(*) Ces réflexions ont été communiquées à l'auteur, alors enfant, par son père.

ainsi qu'a échanger une intuition claire et précise contre un mode de représentations incertain et flottant ?

L'infiniment petit inséparable de l'idéal, que l'Empiriste représente comme un danger contre lequel il faudrait se garer, ne s'est certes pas encore fait une place incontestée dans le système de concepts communs à tous les hommes, et cela s'explique suffisamment, comme je l'ai montré. Mais l'infiniment petit correspond d'une façon incontestable à l'infiniment grand, qui trouve immédiatement accès, et même doit être considéré comme appartenant au système de concepts communs à tous les hommes. C'est notamment le concept d'égalité généralisé, suivant lequel $a +$ un infiniment petit $= a$, si a est fini, qui semble répugner à l'Empiriste et qu'il nomme propriété étrange de l'infiniment petit. Or en mathématique depuis longtemps l'égalité $\infty +$ une quantité finie $= \infty$ a acquis droit de cité. Cette propriété de l'infiniment petit n'est pas formellement distincte de celle de l'infini. L'égalité précédente est pour ainsi dire moins élevée d'un degré que cette dernière.

Mais on peut encore comprendre la chose autrement. On peut dire que le signe d'égalité ne s'applique qu'aux parties finies dans les deux membres de l'équation tout comme on décide dans certains calculs que ce signe ne concerne que la partie réelle ou que la partie imaginaire de chacun des deux membres. De cette façon on n'introduit pas dans le calcul cette propriété de l'infiniment petit, qui consiste à ne pas changer le fini par voie d'addition ; du moins on ne l'introduit pas d'une façon formelle, car au fond le sens des opérations la suppose.

33. — Sur le double concept des idéaux géométriques. — La définition des idéaux géométriques n'est pas une définition nette ; au contraire, on se trouve en face des deux manières essentiellement différentes de concevoir le point, les lignes, les surfaces, dont l'une reconnaît à l'infiniment petit un rôle important, et c'est ici le lieu d'insister un peu sur cette question. Il y a deux manières de concevoir la formation des idéaux géométriques, comme limites de représentations ordinaires. L'une donne à la pensée pour point de départ l'espace fermé, limité par des surfaces, et la fait donc partir de la surface idéale qui ne forme une limite exacte que d'un seul côté, celui où elle sépare l'espace donné de ce qui l'entoure, et qui de l'autre côté est négligée comme l'est, dans la représentation de l'angle, l'espace compris entre ses côtés. Deux surfaces se coupent suivant une arête, celle-ci est limitée par deux autres surfaces qui engendrent ainsi avec ses deux points extrêmes l'étendue limitée en longueur.

L'autre mode de formation des idéaux géométriques repose

sur la représentation de limite de l'infiniment petit, et développe les représentations géométriques fondamentales dans l'ordre inverse. Ici se place tout d'abord le point équivalent à un espace qui se contracte à l'infini dans chacune de ses directions, c'est-à-dire à un espace qui ne peut être mesuré dans aucune direction à l'aide d'une unité finie. Quelques auteurs font ensuite engendrer les lignes par le mouvement continu de cet espace — point infiniment petit, et la surface par le mouvement de la ligne. Abstraction faite de ce que ce mode de représentation exige un certain rapport de mesure entre les trois idéaux géométriques fondamentaux, auquel ils ne sont pas soumis en eux-mêmes, ce mode de représentation naît uniquement d'une image spéciale à peu près comme naissent des espaces creux dans les levains, quand on y fait entrer de force des corps solides ; il revient en somme au mouvement et ne possède pas en général le degré d'abstraction auquel on doit aspirer dans la détermination de concepts aussi importants.

Sans avoir égard au mode de formation du point, il faudra concevoir la ligne comme la limite d'un fil ténu. D'après ce principe de définition la surface doit être considérée comme un corps infiniment ténu suivant une seule dimension, selon la représentation de Gauss (*Disquisitionnes circa superficies curvas*, art. XIII). Il est incontestable que le deuxième mode de formation se rattache mieux à la représentation mathématique des figures géométriques fondamentales. Seulement, il suppose le concept de l'infiniment petit, auquel nous n'arrivons toutefois qu'en partant des représentations géométriques exactes de la première espèce.

La suite la plus logique des idées, qui mène aux idéaux géométriques des mathématiques, pourrait être celle-ci : On mettrait en tête le premier mode de représentation, suivant lequel on conçoit la ligne non limitée comme arête. Puis de la représentation de l'arête exacte, découle, comme je l'ai montré dans le système de l'Idéaliste, le concept de l'infiniment petit, ce qui permet en définitive de concevoir les idéaux géométriques d'après le deuxième mode.

L'EMPIRISTE

34. — Conclusion de sa critique de l'Idéalisme. — Ce qui jusqu'ici est sorti de notre plume pour et contre l'Idéalisme, suffit à montrer nettement l'opposition et l'incompatibilité de nos deux modes d'intuition, qui doivent s'étendre non-seulement aux concepts fondamentaux des mathématiques mais à

l'ensemble de notre conception du monde. Une suite de représentations, qui éveille en nous le désir de la poursuivre jusqu'à son terme, peut par sa nature ne pas posséder un pareil terme dans notre système de représentations. Je me contente de poursuivre la suite de représentations aussi longtemps qu'elle implique des représentations, mais l'Idéalisme donne sa conclusion comme un fait, même quand il ne peut pas en démontrer l'existence ni, à plus forte raison, s'en former une représentation. L'Idéaliste se tire d'affaire avec des *axiomes*.

Axiome est et reste l'existence de la *mesure exacte*, car je ne puis reconnaître aucun caractère concluant à la démonstration que l'on vient de tenter à ce sujet. Elle repose tout d'abord sur une limite non représentable, l'espace vide ou l'espace homogène. Toutefois pour admettre cette limite, on n'a nullement besoin d'accorder que l'espace vide renferme en réalité toute figure. De fait, il ne renferme rien. Nous tirons de notre mémoire des images de figures passablement exactes et nous nous représentons alors au lieu de l'espace vide un espace qui renferme ces figures. C'est incontestablement tout ce qui s'est passé. La méthode que suit l'Idéaliste pour conclure de ce fait à l'existence des idéaux me semble fausse. Car son argumentation, suivant laquelle les idéaux géométriques sont présents dans l'espace, sous prétexte que tout bloc de marbre renferme des milliers de statues qui attendent que le sculpteur les délivre, et que d'ailleurs l'idéal doit être aussi vraisemblable qu'une certaine déviation, repose déjà absolument sur l'hypothèse de l'idéal, — une déviation déterminée, dont la définition géométrique est de même nature que celle des idéaux, devant obéir aux mêmes lois que ceux-ci. Quand je parle de figures géométriques inexactes, c'est-à-dire oscillant entre des limites qui sont à établir d'une manière quelconque, je n'ai point en vue une figure spéciale, mais toutes figures possibles renfermées dans ces limites.

Enfin, l'Idéaliste invoque les éléments derniers du monde des corps, lesquels éléments doivent avoir des limites exactes, car, dans le cas contraire, on ne serait pas encore arrivé au dernier degré d'abstraction. Toutefois on ne saurait en conclure simplement l'existence de figures exactes, par la raison que ces éléments derniers sont précisément des limites de représentations aussi peu représentables que les idéaux géométriques; je les juge également inadmissibles les uns et les autres. Je n'ai rien à objecter aux théories corpusculaires, quant aux atomes je les rejette.

La différence de nos méthodes de logique se montre de la façon la plus nette dans une détermination de concepts de l'Idéaliste à laquelle il attache lui-même une importance toute

spéciale, je veux parler de sa distinction entre « illimité » et « infini » que je veux encore attaquer en finissant. Pour ma part, avec la meilleure volonté du monde, je ne puis me figurer que des choses finies d'une grandeur et d'une petitesse arbitraires ; à mes yeux, c'est un hasard malheureux que « infini » dise autant que « non fini ».

Le sens primitif du mot est assurément « sans fin » synonime de « illimité ».

Qui doute que nos perceptions des sens ne nous permettent qu'une pénétration tout à fait imparfaite dans l'essence des choses ?

Seulement dans ce penchant à franchir les limites naturelles de notre pouvoir représentatif avec des limites de concepts insaisissables, je vois un égarement de notre instinct de connaisance et je tiens pour sage de contenir à l'occasion cet instinct tout comme les autres et de me résigner, lorsqu'une connaissance profonde m'est refusée.

L'IDÉALISTE

L'opposition psychologique de nos modes d'intuition, telle que l'a présentée l'Empiriste est incomplète sur un point que l'Idéaliste considère précisément comme décisif. Le domaine de notre pensée ne renferme pas seulement la mosaïque de tout ce qui est perceptible, et les représentations et concepts qui en dérivent par le travail de notre pensée, c'est-à-dire par une suite de transformations et de combinaisons, mais encore nous possédons la conviction inébranlable — peu importe ici comment nous l'avons acquise — de l'existence de certaines choses en dehors du système de représentations.

C'est un sentiment semblable à celui qui nous fait admettre comme fondement de nos perceptions des existences réelles en *dehors de nous*, quoique nos perceptions ne leur soient pas adéquates, et que nous ne puissions jamais être en état de nous former une représentation du réel, dont nos perceptions, suivant une expression de M. Helmholtz, sont les signes.

Les concepts idéalistes d'infini, d'exact, etc... sont dans un rapport direct avec cette réalité, cette machinerie insondable qui se cache dans les coulisses du monde des phénomènes. L'Idéaliste tout aussi bien que l'Empiriste juge inutile d'ergoter sur la nature propre du réel ; de même il n'essaie pas de *démontrer* l'existence de ce qu'il pense en dehors du système de représentations, de l'infini, de l'exact, etc... au sens ordinaire. Car une démonstration, comme une explication, pour

parler d'une façon générale, consiste en somme à rétablir une suite logique de représentations entre une représentation qui nous inquiète et des représentations qui ne troublent pas notre quiétude. La suite devrait ainsi se trouver avec ses deux termes extrêmes au-dedans de notre système de représentations ; donc une pareille preuve de l'existence de nos idéaux géométriques est inimaginable.

Mais il y a justement des cas où, les représentations se trouvant à l'intérieur et leurs limites à l'extérieur de notre système de représentations, l'existence d'une limite de représentations saute immédiatement aux yeux comme lorsqu'il s'agit de l'infinitude de l'espace. L'espace ne saurait être mesuré avec des multiples d'unités de longueur finie. Supposons donc l'espace objectif indépendant de l'existence d'êtres pensants, la mesure n'en sera pas donnée par un nombre fini. L'Idéaliste n'affirme pas davantage, et c'est uniquement de cette propriété de la mesure de l'espace qu'il fait usage. L'espace une fois admis, l'espace vide l'est aussi, car ce que renferme fortuitement l'espace change de place sans rien changer à l'espace.

L'espace existe en lui-même. Si on m'accorde en outre l'existence dans un bloc de marbre d'un tétraèdre dont je peux indiquer les angles à un sculpteur, avec toute la précision que permet la nature du marbre, je peux en réclamer autant à l'égard de figures quelconques de l'espace. Car à la fin de la suite de représentations d'images s'écartant de moins en moins de l'idéal, apparaît l'arête exacte, et il sera aussi impossible de la rejeter que l'infinitude de l'espace.

Dans l'exposé présenté par l'Empiriste du processus psychologique qui conduit aux idéaux, il n'est donc pas fait mention de cette impulsion irrésistible qui nous pousse suivant certaines directions en dehors du domaine de ce qui peut-être représenté.

Ainsi, quand nous nous abandonnons à ces pensées qui paraissent si naturelles, l'Empiriste voit en cela un égarement de l'instinct de connaissance. Il est possible que son intuition du monde le garantisse de mainte illusion, toutefois le renoncement qu'il s'impose n'est pas précisément le fait de chacun. En ne donnant un libre cours à ses pensées que dans les limites des représentations et des concepts qui répondent à des perceptions ou en sont abstraits, il agit comme l'enfant sage qui se garde bien de franchir la haie du jardin. La pensée idéaliste est le garçon pétulant qui se moque des limites, revendique comme sien le domaine entier des représentations et pressentiments et arrive à franchir les broussailles, a gravir les roches, pour atteindre à des hauteurs, d'où l'œil embrasse

un vaste horizon. Il pourra s'égarer, mais à coup sûr il verra plus de choses que l'enfant sage.

L'Empiriste a dans sa critique rejeté presque tout ce que nous appelons concepts fondamentaux des mathématiques, le bagage dont nous armons le commençant au seuil de cette science. Il ne veut rien savoir de la mesure exacte, des figures géométriques exactes; il nie l'existence de la limite mathématique; pour lui, il n'y a que du fini, rien d'infini dans l'espace ni dans le temps. Qu'il nous enseigne donc maintenant comment il veut mettre en harmonie ses vues avec les exigences des mathématiques en ce qui touche la rigueur des concepts.

Le Système empiriste

L'EMPIRISTE

3. — Epuration du système de concepts. — J'ai déjà énoncé ou tout au moins indiqué dans ma critique du système idéaliste les idées fondamentales du mode de représentations des choses de l'Empiriste. Loin d'autoriser le libre usage des concepts communs à tous les hommes, mes hypothèses exigent une limitation dans certains sens. Je dois, pour les appliquer aux notions qui servent de base à l'analyse, les exposer avec plus de détails et bien montrer en quoi elles consistent.

Tout ce qui est bien fondé scientifiquement, toute connaissance sûre dérive des perceptions immédiates et doit pouvoir se ramener à notre système de représentations correspondant aux objets perceptibles. J'entends ici par perceptions, toutes aperceptions, par suite, non-seulement les perceptions des sens, mais encore celles qui se rapportent à notre entendement.

Cette proposition à besoin d'éclaircissements. En donnant à mes raisonnements scientifiques comme unique fondement solide le système de perceptions, je veux dire que j'admets seulement de notre système de concepts ceux qui, d'une manière quelconque, peuvent se ramener à des perceptions. Les représentations qui s'introduisent dans la pensée ne correspondent pas nécessairement, même pour la plus petite part, à des perceptions qui ont eu lieu ; ce sont souvent des produits de l'imagination, c'est-à-dire d'une activité psychique qui a fait notre système de représentations ce qu'il est et l'enrichit sans cesse au moyen de décompositions, de combinaisons, de variations de grandeur, de forme, d'intensité, de qualité des objets perçus (par qualité j'entends, par exemple, la couleur, le son, bref ce qui ne peut se ramener aux qualités linéaires).

Toutes nos représentations doivent donc pouvoir se ramener par combinaison, décomposition, variation de grandeur, de forme, d'intensité, de qualité, à des perceptions des sens. Je dirai d'un mode de représentation qu'il est réel, quand il satisfera à cette condition. Or, comme je l'ai déjà remarqué, il s'introduit dans notre système de concepts des mots auxquels ne correspondent pas des représentations réelles, mais bien des limites non représentables de représentations. Ce n'est que comme mot qu'une pareille limite est une représentation réelle ; de fait, elle se réduit à un pressentiment vague, à une tentative,

toujours infructueuse de franchir les bornes de notre esprit. De purs concepts-mots de cette espèce, je les exclus du processus de ma pensée, laissant ainsi de côté les idéaux géométriques, et beaucoup d'autres.

Cette épuration du système de concepts repose toutefois sur une hypothèse. Si j'admets que le système empiriste de concepts répond point par point à la perception immédiate, je ne prétends pas dire que tout homme dans son développement doit se le former de nouveau à l'aide de ses perceptions. Les raisons les plus concluantes nous font croire, au contraire, que notre système de concepts, et non pas seulement le système empiriste, est en grande partie transmis par l'hérédité. (*) Mais l'hypothèse suivant laquelle notre système de concepts ne renferme que des représentations provenant de perceptions ou pour m'exprimer brièvement, de portions de perceptions — que ces perceptions se soient produites chez chaque individu ou dans l'humanité durant son développement entier, — n'est précisément qu'une hypothèse, et elle peut être attaquée, comme on va voir tout de suite. Notre système de représentations auquel tout d'abord est réductible notre système de concepts pourrait encore renfermer une troisième chose, à savoir le représentable dont on ne peut démontrer qu'il se ramène à des perceptions où à des portions de perceptions. En effet, on pourrait bien s'imaginer que dans le cours des siècles, depuis l'origine de l'être organisé jusqu'au développement du cerceau des mammifères et plus tard encore — des perceptions se sont réalisées qu'il est actuellement impossible de reproduire. Mais ceci devrait résulter de l'analyse de nos concepts, et un phénomène psychique aussi remarquable eût été certainement constaté. Cependant l'éventualité que j'ai signalée nous oblige à compléter la conception empiriste par l'hypothèse que toute représentation humaine est formée de perceptions ou d'éléments de perceptions possibles aujourd'hui encore.

34. — Application des principes empiristes aux représentations initiales de l'analyse. — Remarques préliminaires. — Tels sont les traits principaux de l'intuition empiriste ; je vais montrer ce que sont pour elle les concepts fondamentaux de l'analyse. Je pose avant tout que nos représentations initiales doivent nécessairement suffire à nous fournir toutes les propositions, les méthodes, bref, tous les résultats des mathématiques, à amener par conséquent cette science à n'importe quel degré de son développement. Car toute relation exacte

(*) Cette question est traitée dans l'ouvrage déjà cité page 89.

entre les concepts, qui peuvent facilement se résoudre en perceptions ou portions de perceptions, je dois pouvoir la tirer des perceptions, sans l'aide du non représentable. L'Idéaliste ne doit donc pouvoir obtenir entre des quantités mathématiques aucune égalité exacte que je ne puisse déduire de mes représentations. Sans doute il trouvera entre ses fictions, l'exact idéal, l'infiniment petit, etc., des relations qui ne s'offrent pas à moi, mais c'est seulement parce que je repousse toutes les fictions.

Ma première tâche est d'éclaircir, au point de vue empiriste, le concept de limite, que l'idéaliste est obligé de considérer comme un axiome. Car peu importe ici que l'Idéaliste nous demande de croire à la limite elle-même ou à l'infiniment petit, ou à l'idéal exact : au commencement ou à la fin, il faut que quelque part la foi supplée à un anneau dans la chaîne de ses raisonnements. La mathématique de l'Empiriste n'admet pas d'axiome. Si le besoin s'en fait sentir, c'est que ses principes fondamentaux ne sont pas suffisamment approfondis. On range à la vérité bien souvent parmi les axiomes des relations entre certains concepts appartenant évidemment au domaine du réel, mais non encore assez complètement analysées. Ce ne sont pas là de vrais axiomes. L'axiome dont il est ici question exige toujours qu'on tienne le non représentable pour une existence.

Ma preuve de l'existence de la limite se déduit de mes représentations géométriques fondamentales. C'est une représentation réelle qui se forme, quand j'imagine une figure répondant à sa définition avec une exactitude de plus en plus grande. Je peux donner un libre cours à ma fantaisie, quand elle idéalise indéfiniment la finesse de la plume à dessiner, de la feuille de papier, de la toile, etc. Le fait d'idéaliser est parfaitement fondé pour l'Empiriste, là où pourtant il n'existe pas d'idéal représentable. Car lorsque j'idéalise, je modifie bien peu à peu mes représentations dans un sens choisi arbitrairement, mais elles ne cessent pas d'être des représentations réelles. Devant l'idéal lui-même je fais volte-face. Ce n'est à mes yeux que le terme fictif d'une suite de représentations qui prennent naissance dans un raisonnement scientifique et qui de fait n'admettent pas de terme.

Par exemple, je permets à ma fantaisie des variations de grandeurs relatives. Ce que j'en déduis lorsque les déductions sont tirées correctement, suivant le jugement humain, doit logiquement, suivant le jugement humain aussi, être correct et contenu dans mes hypothèses. Les deux touristes cosmiques du Micromégas sont sans doute des représentations réelles et je ne crains nullement de donner pour fondement à mes considérations de pareilles rêveries. Comme exemple d'une ligne

droite qui pourrait très bien suffire aux besoins de la géométrie, j'ai cité le faisceau de rayons qui va d'une étoile fixe à notre pupille. Imaginons une table assez grande et assez plane pour recevoir sur sa surface une section longitudinale de ce faisceau, que nous marquions à la craie par exemple, puis représentons-nous toutes les dimensions de cette table diminuant jusqu'à la grandeur d'un carreau de vitre, nous n'avons jamais quitté notre système naturel de représentations, mais nous sommes parvenus à une ligne droite, qui dépasse peut-être en exactitude tout ce que la nature ou la main de l'homme peut fournir.

Ainsi rien ne nous empêche de trouver au sein même des représentations réelles l'image d'une ligne droite de plus en plus parfaite, bien que dans le monde des phénomènes où nous vivons la distance moléculaire ou quelque chose de semblable fixe une limite à l'exactitude des images géométriques. Il est absolument interdit à notre fantaisie de déduire des représentations l'idée de la ligne droite parfaite, comme je l'ai prouvé dans ma critique du système idéaliste (art. 31). Ainsi l'opposition entre l'Idéaliste et moi se concentre dans l'opposition de *l'exact parfait* et *l'exact à volonté*. Cette distinction peut paraître une vaine subtilité, quelle erreur ! On verra qu'elle a une portée très profonde.

35. — Représentations empiristes des images géométriques. — L'image empiriste de la ligne qui vient d'être esquissée est du reste double, suivant qu'on songe à un tracé idéalisé on a une figure de l'espace. Dans le premier cas, comme nous l'avons indiqué plus haut, on se représente une bande plate, dans l'autre cas, un bâton ou un fil ; le faisceau de rayons de tout à l'heure est un exemple de ce dernier cas. Ma conception de l'étendue détermine en même temps ma conception du point. Ce point aussi ne peut être qu'un espace, petit à volonté dans tous les sens. Sa définition ultérieure de forme variera suivant le problème qu'on traitera. On pourra le définir en lui-même ou bien à l'aide de représentations où il intervient. Une pareille description du point est fournie par la réciproque de la proposition. « Les lignes se coupent en des points. » Elle donne : *Le point est la portion d'espace commune à deux lignes qui se coupent.* Si nous restons dans cette détermination du concept qui exige seulement la représentation de la ligne, la conséquence la plus directe est que, au point de vue empiriste, la longueur est formée de points, ou peut être considérée comme telle. Si fine que je puisse me figurer la ligne, elle a toujours une épaisseur qui certes n'est pas exacte, mais reste nécessairement dans un rapport fini avec la longueur de la ligne. Que mes représentations partent de l'image de la ligne,

le point sera alors un morceau de la ligne, d'une longeur égale à l'épaisseur de celle-ci, et ses dimensions resteront dans un rapport fini avec l'unité de longueur. Quand on songe au point isolé, on se le représente d'ordinaire dans un dessin comme un disque mince, petit, en forme de cercle, et, dans l'espace, comme un petit sphéroïde. Cependant la forme du point, tout comme celle de la section de la ligne est indifférente. L'un et l'autre sont seulement soumis à la condition d'avoir dans tous les sens des dimensions petites à volonté.

Quant à la conséquence que la ligne, et de même naturellement l'espace, est un composé de points sans lacune, la conception empiriste ne saurait s'y refuser quelles que soient les représentations simples qu'elle prenne pour base.

36. — **Le concept de limite.** — L'intuition empiriste, expliquée par son application aux lignes et points, fournit tout de suite la représentation de la limite d'opérations infinies et certes avec une clarté et un naturel qui donnent pleine satisfaction à notre soif de recherche, au point qu'un novice doué de jugement, à qui les choses auraient été expliquées suivant la méthode empiriste, n'aurait jamais l'idée de voir la manifestatiou de l'infiniment grand et de l'infiniment petit dans une fraction décimale sans fin.

Chacune des voies parcourues par l'Idéaliste (art. 21) et par lesquelles, comme il dit, on pourrait essayer de démontrer l'existence de la limite, conduit l'Empiriste au but.

La voie la plus courte est peut-être la premiòre.

Etant posée un nombre sans fin $o, \alpha_1\ \alpha_2 \ldots$, de l'inégalité

$$o, \alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_q < o, \alpha_1\ \alpha_2 \ldots (\alpha_p + 1)$$

satisfaite pour toute valeur de p et de q, on concluait que les extrémités de toutes les longueurs s_p

$$o, \alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_{p+r}, \ r = 1, 2, \ldots$$

tombent dans l'étendue qui relie les points $o, \alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_p$ et $o, \alpha_1\ \alpha_2 \ldots (\alpha_p + 1)$.

Chacune des étendues suivantes s_{p+1} tombe dans la précédente s_p. La ligne droite que nous nommons étendue unité, est, dans notre représentation, mince à volonté, et nous concevons comme point sur l'étendue unité un morceau de cette ligne aussi court qu'elle est mince. Que nous nous figurions la ligne droite mince au-delà de toute mesure, il existera toujours, déterminée directement par cette minceur, une valeur de p pour laquelle l'étendue s_p n'atteigne pas en longueur l'épaisseur de notre ligne droite, et alors $o, \alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_p$ est la limite de la ligne $(o, \alpha_1\ \alpha_2 \ldots)$ avec l'exactitude que nous apportons dans notre représentation momentanée. Cette exactitude varie à notre gré, et elle appartient également aux longueurs

rationnelles et aux longueurs irrationnelles qu'on peut construire de quelque manière ou qui sont déterminées par des fractions décimales sans fin quelconques. Entre toutes ces longueurs il n'y a donc pas la plus petite différence.

La deuxième démonstration citée par l'Idéaliste est également à mes yeux pleinement rigoureuse, parce que je regarde la ligne comme composée de points. On fait voir dans cette démonstration que l'étendue unité (0, 1) se divise en deux parties, l'une ne contenant que des points qui finissent par être couverts par les étendues o, α_1 ; $o, \alpha_1\ \alpha_2 \ldots$ etc... portées à partir du zéro, tandis que les points de la deuxième ne seront jamais couverts. Les deux étendues se touchent ou bien elles ne sont séparées que par un point hypothétique duquel on ne peut dire ni qu'il sera couvert ni qu'il ne le sera pas. Ou bien ce point, ou bien un point occupant la place où les deux étendues partielles se touchent, forme donc la limite.

Cette démonstration de l'existence de la limite est donc rigoureuse pour l'Empiriste. Je n'affirme pourtant pas que ce soit là la suite d'idées qui nous est naturelle. Comme je l'ai déjà remarqué, nous sommes *sans le savoir*, il serait peut-être mieux de dire *de naissance*, des Idéalistes. Ma démonstration est la conséquence immédiate d'intuitions auxquelles on parvient en épurant le système des concepts d'idéaux non représentables ; mais cette épuration impose une violente contrainte au processus de la pensée qui est pénétré d'idéaux de toutes parts.

Dans le dessin par exemple, on représente la limite comme je l'ai brièvement indiqué à l'article 19. On s'imagine les extrémités des longueurs o, α_1 ; $o, \alpha_1\ \alpha_2$; etc ... portées à partir du zéro marquées par des traits fins et courts coupant transversalement la ligne. Ces traits se resserrent toujours davantage et ils cessent nécessairement quelque part, parce que les instruments refusent finalement de marquer et que surtout on ne peut tirer des traits en nombre illimité. Vient ensuite, séparé des traits $o, \alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_p$ par une courte étendue que nous nommerons nébuleuse, et formant le terme de la série des points, un trait fin, aigu, un peu plus long que les traits précédents, il représente la limite. C'est dans l'étendue nébuleuse qui précède la limite que les fantômes philosophiques prennent leurs ébats. C'est sur elle que roulent les sophismes fameux, et c'est elle que l'Idéaliste a résolue en quantités infinitésimales.

Le dessin de l'Empiriste a une physionomie quelque peu différente. Les traits seront continués même quand les instruments de dessin ne permettront plus de les faire distincts. Alors les traits se confondent les uns avec les autres, de sorte

que leur largeur est plus grande que la distance de l'étendue $o, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p$ à la limite. On ne cessera ce tracer de nouveaux traits que lorsque leur continuation ne prolongera plus visiblement l'étendue à marquer, c'est-à-dire quand ils persisteront à occuper la même place. C'est alors la limite.

37. — **La théorie empiriste dans les éléments de la haute analyse.** — L'Empiriste voulant affranchir son langage de mots et de tournures, qui ne peuvent avoir de sens acceptable que dans la bouche de l'Idéaliste, devra souvent s'exprimer tout-à-fait autrement que ce dernier. Son exposé des concepts fondamentaux, argument, différentielle, etc.... s'éloignera dans beaucoup de cas de celui de l'Idéaliste. Je vais tout d'abord caractériser le langage empiriste sur quelques points essentiels, et expliquer ensuite ma conception de l'argument, de la differentielle etc.

1. — Avant tout, l'infiniment petit et l'infiniment grand au sens de l'Idéaliste n'existant pas pour l'Empiriste, ces mots, s'il lui arrive de s'en servir, ne signifient rien de plus que petit ou grand illimité, sans fin, non mesurable, etc.... et d'autres termes signifiant que dans un sens ou un autre notre imagination n'est arrêtée par rien.

2. — Au lieu de dire d'une quantité variable qu'elle devient infiniment grande ou infiniment petite, l'Empiriste préfère dire que conformément à un but proposé, on lui donne des valeurs suffisamment grandes ou suffisamment petites.

3. — C'est une question un peu délicate du langage précis, que de savoir si et quand on a le droit de dire d'une quantité variable qui prend la valeur a pour une certaine valeur de son argument : elle *devient égale* à a pour cette valeur de l'argument. Sans doute dans tous les cas il est exact de dire simplement : a est pour cette valeur de l'argument la limite de la quantité variable, et par suite dans tous les cas douteux — et dans quelques cas non douteux, l'Empiriste ne s'exprimera pas autrement. La première manière de s'exprimer est fondée lorsque pour la valeur correspondante de l'argument la fonction a un sens clair et une valeur calculable sans aucune indication complémentaire, comme cela arrive, par exemple, à une fonction entière et rationnelle de x pour toute valeur finie de la variable. Mais si la valeur de l'argument est infinie au sens de l'Idéaliste, comme est la valeur de n pour la limite de $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} = f(n)$ ou si, pour une valeur de l'argument, l'expression de la quantité variable cesse d'avoir un sens et d'être calculable, comme $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$ pour $x = o$, l'Em-

piriste ne peut alors employer que la deuxième manière de parler ; et c'est ici que son langage diffère le plus de celui de l'Idéaliste. Celui-ci est, en effet, amené par ses raisonnements à croire fondée cette façon de parler : $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$ devient exactement égal à e, quand x devient infiniment petit (Art. 27). — En outre, l'Empiriste ne rejettera le pur zéro que dans les applications manifestement absurdes de ce symbole au calcul. Les formes $\frac{1}{0}$, $\frac{0}{0}$ etc., lui paraissent tout aussi dénuées de sens qu'à l'Idéaliste. Seulement il ne voit pas de raison pour ne pas employer dans ses calculs le zéro aussi bien que des quantités, comme valeur ; il est assez souvent une limite. D'ailleurs la représentation empiriste de l'exact à volonté s'étend aussi au zéro.

4. — L'argument ou la variable indépendante. — La détermination empiriste du concept de l'argument exige certaines distinctions délicates, tandis que l'argument de l'Idéaliste est certainement une représentation beaucoup plus simple. Pour l'Idéaliste, la variation des longueurs et l'expression numérique des quantités à l'aide de l'unité donnent les deux conceptions géométrique et arithmétique de l'argument et se correspondent directement. Ces deux conceptions sont également fondées. Et, bien que la quantité linéaire soit le concept primitif, on peut cependant à chaque instant dans la détermination du concept de l'argument placer au premier rang l'une ou l'autre des deux conceptions. Pour l'Empiriste les choses se passent autrement. Il y a, sans doute, entre une longueur exacte à volonté qui s'offrirait à nous n'importe comment, et une fraction décimale sans fin, dont la loi de continuation nous serait donnée, une complète équivalence. Car, si je puis mesurer cette longueur exacte à volonté, cela me permet d'écrire autant de chiffres que j'en désire à la suite de la fraction décimale sans fin, tout comme si j'en connaissais la loi. Que la loi puisse me fournir les rapports à d'autres fractions, ou me permette de découvrir les structures de celle dont il s'agit, cela sort de la question de la pure équivalence en grandeur. Au surplus, les chiffres nombreux « à volonté » déterminent la loi de leur succession.

Mais si nous considérons non plus seulement une seule quantité déterminée, — donnée des deux manières, comme longueur et comme fraction d'unité exprimée numériquement, mais l'ensemble des quantités comprises entre deux limites, alors pour l'Empiriste l'équivalence entre les deux conceptions

de l'argument se heurte à des difficultés. Que je rejette les nombres éternellement sans loi de l'Empiriste, cela importe peu. Seulement les considérations suivantes sont en faveur d'une supériorité de la conception arithmétique de l'argument.

En partant de la représentation géométrique, comme je n'admets pas qu'une longueur ait un terme exact, j'étendrai la même inexactitude à toutes les longueurs intermédiaires d'un intervalle. J'ai beau imaginer l'idéalisation de la ligne droite limitée poussée aussi loin qu'on veut, toutes ses parties rationnelles sont entachées de la même inexactitude, il n'existe donc en réalité que des fractions rationnelles de la ligne droite dont les dénominateurs après réduction ne dépassent pas une certaine quantité, — celle-ci dépend du degré d'exactitude que j'admets momentanément. Je pourrais par suite poser pour fondement, comme image de la grandeur de l'argument, parmi tous les segments o, α_1 α_2 ... possibles, ceux seulement qui possédent un nombre de chiffres déterminé quoique grand à volonté. C'est évidemment une conception très-restreinte, tout-à-fait insuffisante.

Pour conserver au concept de l'argument toute sa généralité il faut donc, ou bien que le nombre avec sa loi de continuation forme la valeur particulière de l'argument, ou bien encore, ce qui revient au même, que la longueur partielle de l'étendue unité soit supposée avoir une exactitude aussi grande qu'on veut, indépendamment de la représentation de l'étendue unité tout entière.

Ce n'est qu'ainsi que l'Empiriste lui aussi se croira fondé à considérer comme équivalentes les conceptions arithmétique et géométrique de l'argument.

Il peut être très commode au mathématicien empiriste de laisser de côté ces distinctions géométriques ennuyeuses, et de donner la préférence à la conception arithmétique de l'argument. Il ne faut pas oublier qu'elle ne peut être que le *Proteron*. — Le *Proton* est et reste la quantité mathématique linéaire. Car d'abord le besoin de partage, et en particulier la mesure des grandeurs a pu engendrer le nombre et par conséquent ses lois de formation. La science de la mesure partage tout d'abord l'unité en parties égales, elle exige ensuite le partage incommensurable de l'unité, pour déterminer par l'arithmétique des rapports géométriques intuitifs et donne ainsi naissance au concept de l'irrationnelle et de ses lois ; la généralisation scientifique de ces processus fournit finalement le concept de l'argument.

L'Idéaliste semble arriver plus rapidement au but. L'équivalence fondée pour lui logiquement entre l'argument géométrique et l'argument arithmétique le dispense, pourrait-on

penser de considérations analogues aux précédentes. Cependant, s'il y regarde de près, il trouvera qu'on ne lui en fait pas grâce. Précisément l'identité de nature des parties exprimées numériquement l'oblige aussi à tenir compte de la signification arithmétique des points de l'argument. En géométrie et en mécanique, rien n'empêche préalablement une conception géométrique de l'argument, et en cela les hypothèses de l'Empiriste ne sont pas moins applicables que celles de l'Idéaliste. Mais dans l'analyse, on trouve des parties où la conception purement géométrique est insuffisante, et où le nombre doit être joint à l'argument. Les fonctions dont il s'agit ici n'appartiennent plus au calcul différentiel, dont je vais éclaircir les idées fondamentales au sens empiriste.

5. — **Les principes fondamentaux du calcul différentiel dans la théorie empiriste.** — Ce calcul est plus qu'une méthode qui résoud certaines classes de problèmes, c'est plutôt une forme de pensée bien déterminée qui saisit en des concepts d'airain et porte à l'expression la plus précise ce qui dans les rapports des quantités variables est immuable et échappe ou reste obscur au vulgaire. Qui pourrait douter que, si les habitants de Mars possédent une analyse, il faut qu'elle soit identique à la nôtre dans toutes ses parties essentielles ! Je vais tâcher d'expliquer la suite des idées qui doivent conduire au calcul différentiel.

Il coïncide à l'origine avec une propriété spéciale de notre pensée. C'est un procédé bien vieux que celui suivant lequel nous cherchons à décomposer des représentations compliquées en de plus simples qui nous satisfassent. La vue d'une ligne à courbure compliquée attirera notre attention, et par suite, troublera notre quiétude plutôt qu'une ligne droite uniforme, sur laquelle le regard ne surprendra ni courbure ni surtout variation de courbure. Les arcs de cercle aussi, les surfaces planes, les sphères nous laissent plus indifférents que d'autres figures dans le plan et dans l'espace. Ce sont des formes familières de ce genre que nous tâchons de retrouver dans les représentations complexes, et notre procédé consiste à les morceler jusqu'à ce que les éléments perdent le caractère des représentations compliquées et montrent une apparence simple qui nous soit bien connue. Les rapports de mesure que présentent entre-eux ces éléments de représentation et qui, lois élémentaires du monde des phénomènes dans la physique mécanique, sont le but des recherches, trouvent dans le calcul des différentielles la forme qui leur convient exactement. Les différentielles sont l'expression de ce procédé de la pensée humaine, qui lui est équivalente.

Il vaut la peine de développer, de ce point de vue, avec

une complète précision, les principes fondamentaux du calcul différentiel.

Le rapport de dépendance le plus facile à saisir est la simple proportionnalité. Quand on explique au profane le concept de fonction, il songe tout de suite à une croissance ou à une décroissance simultanées ; il voit devenir simultanément deux ou trois fois plus grandes des quantités variables qui dépendent l'une de l'autre. Si on désigne par x la variable supposée indépendante, l'autre par $y = f(x)$, soient x, y, et x_1 y_1 deux couples de valeurs correspondantes, y sera la fonction de x la plus simple qu'on puisse imaginer, si l'on a constamment

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = a$$

où a est supposé indépendant de x et de x_1.

La conception plus générale du concept de fonction engendre ensuite naturellement le désir de retrouver la dépendance la plus simple dans la dépendance sans restriction, et maintenant c'est un résultat de l'intuition *géométrique*, qu'on puisse y parvenir par un morcellement, c'est-à-dire par l'étude de la variation de la quantité dépendante dans des intervalles suffisamment petits de l'argument. On doit ce résultat à la méthode de Descartes, pour figurer les dépendances, et au concept de la tangente, une des plus anciennes abstractions de l'homme. Dans le concept de la tangente est impliqué le retour de la dépendance sans restriction à la proportionnalité et cela sur le fond d'une figure qu'on trouve souvent dans les traités de calcul différentiel et qui est probablement due à Barrow, le maître de Newton. La figure consiste en la courbe $y = f(x)$, deux ordonnées y et y_1 de la courbe correspondant aux abscisses x et x_1, une parallèle à l'axe des x, menée par le point x, $y = f(x)$ et enfin la corde x, y ; x_1, y_1. Soit α l'angle de la tangente à la courbe au point x, y, avec l'axe des x, si on pose $a = tg\alpha$, on a

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = a + \varepsilon$$

où (la tangente étant en vertu de la représentation géométrique fondamentale la position limite de la corde) on peut rendre ε aussi petit qu'on veut, en prenant pour $x_1 - x$ et par suite pour $y_1 - y$ des valeurs suffisamment petites.

Cette relation contient le retour de la dépendance générale à la proportionnalité et elle est le fondement du calcul différentiel. Elle est de nature géométrique et ce doit être, car les représentations viennent en premier lieu, les abstractions analytiques suivent.

Ce qui précède a quelque peu besoin d'un exposé plus exact, pour pouvoir servir de fondement aux principes du calcul.

D'abord la quantité $a = tg\,\alpha$ ne dépend que de x, parce que nous avons mené la tangente au point x, y de la courbe, et nous voulons introduire ici le symbole usuel $f'(x)$. En outre nous n'avons fait appel qu'à l'intuition géométrique qui peut ne pas s'étendre à toutes dépendances, qui peut même s'y refuser complètement. Car par dépendance d'une quantité à l'égard d'une autre, l'argument, ou par fonction, il faut entendre au sens général, qu'aux valeurs particulières de l'argument correspondent des valeurs de la fonction, entre lesquelles il n'existe pas la moindre liaison. La correspondance peut résulter du problème dont nous nous occupons, ou bien être imaginée par nous dans une intention quelconque. Et alors peut naître une suite intuitive de valeurs de la fonction formant une image cohérente, mais ce n'est pas nécessaire et on démontre même que ce n'est pas toujours le cas.

Voici donc ce que nous pourrons dire :

Comme l'intuition et l'expérience l'apprennent, des dépendances sans nombre se comportent de telle manière que l'égalité

$$\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x} = f'(x) + \varepsilon$$

peut être posée. Dans cette égalité $f'(x)$ *ne contient pas d'autres quantités variables que* (x); *et* ε *pour des valeurs de* x_1 *suffisamment voisines de* x (x_1 *peut-être* $< x$,) *peut être rendu aussi petit qu'on veut.*

Les fonctions qui possèdent cette propriété sont l'objet du calcul différentiel.

Il semble convenable de leur donner un nom particulier, et je propose de les appeler fonctions orthoïdes. (*) La condition de l'orthoïdie est certainement très restrictive, puisque déjà

(*) C'est là la classe de fractions, que l'auteur (*Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen etc, Borchardts Journ. Tom. 79. p. 27*) a appelées différentiables. Il place ce nouveau nom dans la bouche de l'Empiriste, parce qu'il lui semble que le sens plus profond au point de vue de la critique de la connaissance, de la propriété de fonction dont il s'agit, devait au moins être indiqué dans la dénomination. En effet, l'intelligence de l'expresion « différentiable » suppose le concept du quotient différentiel, tandis que *l'orthoïdie* comme la continuité est en première ligne. C'est seulement l'extension au concept de fonction le plus abstrait qui fournit au concept de l'orthoïdie le caractère analytique. Quand à l'expression elle-même, on la tirerait en vérité plus correctement de ὀρθός que de ὀρθός, seulement il faut aussi tenir compte de la commodité du langage.

dans les courbes intuitives usuelles, il intervient des points anorthoïdes, comme le point $x = 0$ dans la fonction $y = x \sin \frac{1}{x}$, si, pour $x = 0$, lorsque $\frac{1}{x}$ n'a plus de sens, on donne à cette fonction la valeur zéro. Mais je viendrai plus loin à l'anorthoïdie

6. — Du calcul à l'aide des différentielles d'après la conception de l'Empiriste et celle de l'Idéaliste.— J'ai exposé ce qui me paraît être le propre fondement du calcul différentiel. Ce calcul opère essentiellement sur deux formes d'égalités, égalités sans différentielles, ne contenant que des quotients différentiels et égalités avec différentielles. En vertu de la méthode des limites, la proposition fondamentale ci-après énoncée donne lieu à des égalités rigoureuses, lorsque les différentielles sont remplacées par des *quotients différentiels*, supposé l'orthoïdie des fonctions introduites dans le calcul. La méthode des fluxions de Newton et le calcul des dérivées de Lagrange sont, quand on s'est accommodé du concept du quotient différentiel, des méthodes de calcul très-claires, que ne vient troubler aucune difficulté de conception. Au contraire, le calcul avec différentielles n'est pas toujours fondé encore avec autant de certitude et de rigueur qu'on pourrait le désirer, pour une méthode parvenue à un usage si général, quoique, depuis surtout le fameux prix proposé par l'Académie des Sciences de Berlin en 1784 (*), des tentatives sans nombre aient été faites dans cette voie. Malgré tout cela, la détresse dénoncée par l'Idéaliste subsiste encore aujourd'hui ; c'est à mes yeux un des phénomènes les plus curieux de la littérature scientifique. Aujourd'hui encore c'est à peine s'il paraît successivement dans « la plus infaillible de toutes les sciences » deux traités qui, lorsqu'ils touchent aux concepts fondamentaux, ne se contredisent de la façon la plus absolue. Aussi, sous le

(*) L'Académie a pensé que le noble titre de « sciences exactes » devait être maintenu aux sciences mathématiques, bien que la « grandeur infinie » qui leur sert si souvent de base d'après la manière de voir des géomètres distingués impliquât une contradiction. Elle demande donc : Une théorie claire et précise de ce qu'on appelle Infini en mathématique. *Lhuilier* de Genève obtint le prix en 1786. Son travail couronné : Exposition élémentaire des calculs supérieurs, Berlin 1786, ne m'est pas parvenu ; mais j'ai pu prendre connaissance de ses vues essentielles dans les additions de J. K.F. Hauff à sa traduction de l'ouvrage Carnot réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal (Francfort-sur-le-Mein 1800). Le mode de conception de Lagrange, qui a appartenu à l'Académie jusqu'en 1787 et de Lhuilier sont Empiristes. Un inconnu obtint encore dans ce concours un accessit. Etait-ce l'Idéaliste ou bien avait-il exprimé moins convenablement que Lhuiler la manière de voir de *Lagrange?*

rapport de son fondement, la science des différentielles a peu progressé depuis Leibniz, qui, on le sait, ne put parvenir à aucune vue déterminée.

Comme Empiriste, je m'explique les choses ainsi :

J'écris l'égalité initiale

$$\frac{y_1-y}{x_1-x} = \frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x} = f'(x) + \varepsilon,$$

où je pose $x_1-x = dx$, $y_1-y = dy$, *sans rien changer au sens* des quantités x_1-x, y_1-y, ainsi j'écris

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) + \varepsilon\,;$$

il en résulte

$$lim\ \frac{dy}{dx} = f'(x).$$

De $\frac{dy}{dx} = f'(x) + \varepsilon$, il résulte encore

$$dy = dx\,[\,f'(x) + \varepsilon\,] \ldots\ldots\ldots\ldots \mathrm{I}$$

égalité tout à fait rigoureuse, si petite que soit dx, même quand on tient compte du concept de l'exactitude au sens empiriste. Peu importe si j'entends par dx un nombre qui désigne une longueur, ou si j'y vois directement une longueur. J'imagine toujours le degré d'exactitude de la mesure uniquement soumis à mon bon vouloir, assez grand pour que les oscillations subsistant encore dans la représentation de l'unité, ne puissent avoir d'influence visible sur les formules.

De l'égalité I que l'Idéaliste (art. 27) donne sous la forme $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \delta$, se fondant sur sa proposition relative à la non influence de l'infiniment petit additif, il tire, en faisant devenir Δx et δ infiniment petits, l'égalité idéaliste

$$dy = f'(x)dx$$

dans laquelle dx et dy désignent donc des valeurs infiniment petites. Mais cette déduction est encore à compléter par la remarque que, lorsque deux quantités qui se correspondent ont en même temps pour limite zéro, si l'une d'elles parcourt une série de valeurs ayant la limite zéro, comme les quantités Δx et δ de l'Idéaliste ou mes dx et ε de tout à l'heure, toutes deux en même temps doivent finir par être infiniment petites au sens idéaliste. Car, supposé que l'une devînt infiniment petite et l'autre non, celle-ci, devant alors rester supérieure à une petite valeur finie, ne pourrait avoir la limite zéro. Cette remarque me permet de transformer sans plus d'explications mes égalités en égalités idéalistes.

Il en est de même de la différentielle d'une fonction de deux variables $z = f(x_1, y)$. On a :

$$dz = f(x + dx, y + dy) - f(x, y) = f(x + dx, y + dy) - f(x, y + dy) + [f(x, y + dy) - f(x, y]$$

Pour pouvoir appliquer aux différences de droite l'égalité fondamentale I, il nous faut supposer que les valeurs x, $x + dx$; y, $y + dy$ tombent dans un intervalle pour lequel $f(x, y)$ soit orthoïdique à l'égard de x, y étant fixe, et à l'égard de y, quand x est fixe.

On obtient alors par l'application de l'égalité I aux deux différences :

$$dz = \frac{d\,f(x, y + dy)}{dx}\,dx + \frac{d\,f(x, y)}{dx}\,dy + \varepsilon_1\,dx + \varepsilon_2\,dy$$

où ε_1 tend vers zéro avec dx, et ε_1 avec dy. Si maintenant le quotient différentiel $\frac{df}{dx}$ est une fonction continue de y au point x, y (*), on peut poser :

$$\frac{d\,f(x, y + dy)}{dx} = \frac{d\,f(x, y)}{dx} + \eta$$

(*) La condition que le quotient différentiel $\frac{df}{dx}$ soit continue par rapport à y ou $\frac{df}{dy}$ par rapport à x, ajoute une nouvelle restriction à la première et inévitable condition d'orthoïdie de $z = f(x, y)$ dans la direction des x et des y. L'absence de symétrie de cette condition fait en vérité soupçonner que l'orthoïdie de $f(x, y)$ a pour conséquence la continuité des quotients différentiels. Ce soupçon cependant ne se justifie pas ; des considérations géométriques, dans lesquelles on ne peut entrer ici plus avant, nous apprennent qu'une fonction continue partout dans le voisinage d'un point x_0, y_0 peut malgré cela donner une valeur finie pour la différence $\frac{df(x_0, y_0 + o)}{dx_0} - \frac{df(x_0, y_0)}{dx_0}$, de même si le quotient différentiel est continu pour x_0.

Il suit de là que pour dériver la formule $dz = \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy$ en un point, cette absence de symétrie par rapport à x et y se comprend très bien. Si, par exemple, le quotient différentiel $\frac{df}{dy}$ est discontinu par rapport à x, il faut alors nécessairement que l'ordre soit celui du texte. En outre, il résulte que si la formule doit-être valable pour tous les points d'un domaine les conditions suivantes doivent être remplies : Pour chaque point $f(x,y)$ doit être orthoïdique par rapport à y, x restant fixe, et par rapport à x, y restant fixe ; $\frac{df}{dx}$, $\frac{df}{dy}$ doivent être continues respective-

où η tombe avec dy au-dessous de toute limite. Il en résulte

$$dz = \frac{df}{dx}\,dx + \frac{df}{dx}\,dy + \varepsilon_1\,dx + (\varepsilon_2 + \eta)\,dy$$

Si on établit entre les variables dx et dy une relation telle que leur rapport reste compris entre des limites déterminées qui ne comprennent pas zéro, la quantité $\varepsilon_1\,dx + (\varepsilon_2 + \eta)\,dy$ divisée par dx ou dy aura alors pour limite zéro en même temps que dx et dy.

Ainsi des relations $y = f(x)$, $z = f(x, y)$, — (dans la 2e x et y doivent être considérées comme indépendantes) — résultent les différentielles

$$dy = f'(x)dx + \rho$$
$$dz = \frac{df}{dx}\,dx + \frac{df}{dx}\,dy + \rho_1$$

où $\frac{\rho}{dx}$, $\frac{\rho_1}{dx}$ ont pour limite zéro en même temps que dx, quand le rapport de dx et dy ne peut ni tendre vers zéro ni dépasser une certaine valeur finie.

A ces égalités rigoureuses correspondent les égalités idéalistes

$$dy = f'(x)dx$$
$$dz = \frac{df}{dx}\,dx + \frac{df}{dy}\,dy$$

---

ment par rapport à y et à x. Les conditions suffisent, et on peut, comme je l'ai remarqué, en démontrer la nécessité par des constructions géométriques.

A ce propos, je pourrais faire remarquer que dans les traités la formule pour la différentiation de fonctions de plusieurs fonctions :

$$\frac{df(u, v, ..)}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{df}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} + \cdots$$

est ordinairement insuffisamment démontrée. On pose, par exemple :

$$\frac{df(u,v)}{dx} = lim \left\{ \frac{f(u+du, v+dv) - f(u, v+dv)}{du} \frac{du}{dx} + \frac{f(u, v+dv) - f(u,v)}{dv} \frac{dv}{dx} \right\}$$

Quand dx tend vers zéro, du et dv y tendent en *même temps*, et la première fraction de droite n'a donc pas la forme qui donne naissance à un quotient différentiel. Pour déduire les formules générales de différentiation, on doit partir de la formule rigoureusement demontrée dans le texte $dz = \frac{df}{dx}\,dx + \frac{df}{dy}dy +$ une correction. Cet exposé de la théorie, qui s'écarte un peu de l'usage ordinaire, n'implique aucune difficulté. Pour la différentiation de fonctions spéciales, il suffit d'avoir établi la différentiation d'une fonction d'une seule fonction à laquelle il est facile de donner toute la rigueur possible. Les concepts les plus simples de différentiation partielle permettent alors de passer à la dérivation de la formule générale.

Ici encore est valable la condition relative au rapport de dx et dy, car, si des quantités dx et dy l'une est infiniment petite par rapport à l'autre, le terme multiplié par elle disparaît simplement — en vertu de la proposition sur les infiniment petits additifs.

Maintenant, l'analyse ne fait pas usagé au moins ordinairement des égalités exactes de forme empiriste, et il n'en résulte aucune faute de calcul. Comme cela paraît être en faveur de la rectitude de la marche idéaliste, je me sens doublement obligé à montrer et à expliquer que les égalités empiristes non exactes qu'on obtient en négligeant ρ et ρ_1 et qui concordent avec les égalités initiales de l'Idéaliste, doivent conduire à des résultats exacts, de sorte que c'est à la combinaison algébrique fortuite des égalités exactes que l'Idéaliste doit de pouvoir tirer de ses hypothèses un calcul rigoureux. Bornons-nous aux égalités linéaires par rapport aux différentielles. Soient $x_1, x_2 \ldots x_n$, — les variables. Quand il s'agira d'une différentiation, on aura entre les différentielles $dx_1, dx_2 \ldots$, comme nous l'avons montré plus haut, une égalité de la forme $\Sigma\, a_p\, dx_p + \rho = o$, homogène par rapport aux quantités dx et ρ, où les rapports des dx varient entre certaines limites fixes qui ne comprennent pas zéro, et le rapport de ρ à l'un des dx a pour limite zéro avec dx. S'agit-il, par exemple, d'une équation de Pfaff, j'y ajoute une correction ρ. Qu'on imagine maintenant autant d'équations de ce genre qu'on voudra, entre différentielles, données au sens empiriste avec les corrections correspondantes; que sur ces équations on effectue des calculs algébriques : additions, multiplications, élimination, introduction de nouvelles variables à la place des x, décomposition en facteurs, etc., on ne pourra jamais obtenir d'autre résultat qu'un nombre quelconque d'équations de nouveau homogènes par rapport aux dx et aux ρ. Je suppose qu'un pareil système d'équations forme le terme du calcul. Chacune des équations se compose alors de deux parties, une partie indépendante des ρ, et une qui les contient en facteurs. Si on passe aux quotients différentiels, en divisant les équations résultantes par l'un des dx avec l'exposant convenable, chacun des ρ dans la partie qui les contient est divisé par un dx et comme dx décroissant indéfiniment les $\frac{\rho}{dx}$ ont zéro pour limite, *toute la partie qui dépend des ρ dans les équations qui portent sur les quotients différentiels disparaîtra, exactement comme si nous l'avions laissée de côté dans les équations primitives.*

Cette simple remarque algébrique dévoile tout le mystère. C'est parce que les équations initiales sont homogènes par rapport aux différentielles et aux ρ que les équations finales le

sont aussi. Et quand on passe ensuite aux équations, aux quotients différentiels, c'est-à-dire aux résultats réels, les corrections disparaissent. On pourrait donc les laisser de côté dans les équations initiales.

Nous nous sommes placés dans le cas le plus simple d'un système d'équations initiales linéaires par rapport aux différentielles. Si, parmi ces équations, il s'en présente par suite d'une double différentiation, je suppose, qui renferment des différences secondes $d^2 x_1$, $d^2 x_2$,. Ces secondes se comportant à la limite comme carrés ou produits des différences premières, on arrive au même résultat, toutefois après avoir convenablement opéré sur les corrections correspondantes. Aussi je n'entre pas plus avant dans ces généralisations, dont la marche est facile.

Cette détermination empiriste des bases du calcul différentiel doit satisfaire au besoin de rigueur, mais elle ne doit pas nous égarer en nous détournant du sens habituel des symboles, ni enrayer la marche facile du calcul par l'introduction pédante de corrections. L'Empiriste lui aussi posera $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ et négligera les ρ dans les équations différentielles, absolument comme l'Idéaliste. Pourtant, il n'oubliera pas que les corrections sont sous-entendues et que les équations sans elles ne sont que des abréviations, comme par exemple :

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

et mis pour

$$1 = \lim_{n = \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \right)$$

Ce qui est encore, aux yeux de l'Empiriste qui n'admet pas d'infinis, une abréviation pour : 1 est la valeur limite dont $\Sigma \frac{1}{2^n}$ diffère aussi peu qu'on veut quand on donne à n des valeurs suffisamment grandes.

7. — Conception intermédiaire de la différentielle. — Entre la conception de l'Idéaliste pour qui dx est purement et simplement un infiniment petit, auquel pourtant il joint l'idée de quelque chose au repos, non variable, — et ma propre conception, suivant laquelle dx est fini et suffisamment petit mais également au repos — il s'en présente une troisième, (mentionnée plus haut) — qui voit dans dx une quantité évanouissante. C'est alors une quantité qui varie d'une manière durable dans la direction du zéro. Cette idée d'une quantité qui s'écoule

sans cesse me paraît inacceptable à l'esprit humain. Il me répugne de regarder des signes comme des quantités qui attendent pour se mettre en mouvement et accourir vers le zéro que je considère les formules, et qui pourtant ne peuvent arriver au zéro qu'à la fin du calcul. Tant que le livre est fermé, il règne un profond repos. dès que je l'ouvre, commence la course vers le zéro de toutes les quantités munies de *d*. La représentation de la quantité illimitée est pour moi un peu moins troublante, parce qu'elle ne suppose pas d'état durable dans l'accroissement comme celui qu'on supposait dans la diminution des différentielles ; elle désigne an contraire des quantités qui dépassent de façon à échapper à toute mesure tout ce que fournissent les formules. Seulement je préfère encore donner à mon exposé une forme telle *que je n'ai jamais besoin que de valeurs suffisamment grandes.*

De telles représentations, ou mieux de telles prétendues représentations de quantités qui croissent ou décroissent constamment au-delà de toute quantité finie — (c'est-à-dire au-delà du représentable) naissent d'un Idéalisme obscur ou timide. D'ailleurs, je ne m'élève pas contre le mouvement des quantités d'une formule approprié à des buts déterminés. Que de fois, par exemple, il nous arrive de chercher ce qu'il advient des fonctions , qu'elles limites elles ont quand leurs arguments prennent certaines séries de valeurs ! Nous-mêmes venons de donner comme équations finales du calcul sur des différentielles finies, les équations liant les valeurs limites des quotients des différentielles.

Ce sont seulement les quantités marchant sans cesse vers un but déterminé qui me semblent être une concession bien dure demandée à la fantaisie du lecteur.

8. — **Quelques remarques sur les fonctions anorthoïdes.** — Ce n'est pas l'anorthoïdie en des points *isolés* qui est un caractère distinctif de la mathématique moderne, mais bien l'anorthoïdie *permanente* de certaines fonctions. Elle suppose décidément la conception numérique de l'argument parcequ'elle donne naissance à des différences formelles dans les valeurs de l'argument, qui reviennent dans tout intervalle si petit qu'il soit. Par exemple, les nombres rationnels et les irrationnels, les nombres algébriques de différents ordres et les nombres transcendants de différentes formations peuvent servir à distinguer les valeurs d'argument. On peut imaginer que si, aux valeurs d'argument distinctes, on fait correspondre d'une manière convenable des valeurs de fonctions distinctes, il se forme pour la fonction dans le plus petit intervalle qu'on puisse imaginer des différences de valeurs qui ne correspondent plus à l'image d'une courbe visible.

La première idée d'une pareille correspondance est plutôt due à Lejeune Dirichlet. (*) Il a incidemment recours à une fonction qui prend pour des valeurs rationnelles de l'argument une certaine valeur constante i, et pour les valeurs irrationnelles une autre valeur d. Riemann (**) nous a ensuite enseigné une méthode pour former des fonctions de ce genre. Elle consiste à additionner une série de fonctions auxquelles on donne certaines oscillations ou discontinuités de plus en plus fréquentes. Si on a, par exemple, une suite de fonctions, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$..., dont la première *saute* (***) pour toutes les valeurs entières de l'argument, la deuxième pour les multiples entiers de $\frac{1}{2}$, le troisième pour les multiples entiers de $\frac{1}{4}$, etc., et si on forme la somme $\lambda_1 \varphi_1(x) + \lambda_2 \varphi_2(x) + \ldots$, où les λ représentent des coefficients numériques choisis de façon à rendre la série convergente, — la somme de cette série représente alors une fonction qui *saute* dans tout intervalle si petit qu'il soit.

Il y a trois sortes de fonctions de ce genre qui nous intéressent. Des fonctions généralement discontinues — parmi celles-ci, en particulier, les fonctions intégrables, — et des fonctions continues qui sont généralement anorthoïdiques. — Le plus remarquable exemple sinon le premier en est dû à M. Weiertrass. (****) — Toutes les fonctions de cette espèce ont contrairement aux fonctions ordinaires ceci de commun qu'on ne peut s'en former aucune représentation visible. Les oscillations d'un intervalle, si petit qu'il soit, ne correspondent à aucune image précise au repos. Tout au plus peut-on souhaiter d'y découvrir une propriété *analytique* générale. Mais il ne semble pas que ce soit facile. On pourrait songer à borner la série des nouvelles fonctions à celles qui ou bien sont généralement discontinues elles-mêmes, ou bien qui ont un quotient différentiel plus ou moins éloigné discontinu. Mais, si on songe que, par exemple, la fonction $e^{-\frac{1}{x}} \sin \frac{1}{x}$ est orthoïdique à l'égard de tous ses quotients différentiels, et pourtant tend vers zéro avec des oscillations de plus en plus resserrées, on comprend que la délimitation du domaine des fonctions « ordinaires » à l'intérieur du concept général de fonction ne puisse être précise ;

(*) Journal de Crelle, vol. 4. p. 169.
(**) Gesammelte math. Werke, 228.
(***) « Springt ».
(****) « Borchardts Journal ». Tom. 79, p. 29.

qu'au contraire ici, comme il arrive si souvent dans les classifications systématiques, au lieu de la ligne limite qu'on désire, il y a une zone incommode de transition.

Tandis qu'avant Leibniz on entendait par fonction une puissance de l'argument, la signification plus générale du mot (attribuée à Jean Bernouilli) s'est developpée à la suite du calcul différentiel. Cependant, c'est Dirichlet et Riemann qui, en signalant la dépendance anorthoïdique ont les premiers donné au concept de la fonction sa généralité.

36 — **Conclusion de l'Empiriste.** — Je ne nie pas que les idées hardies de l'Idéaliste et sa théorie, évidemment logique et bien conduite, ne contiennent un excitant à de profondes recherches, plus vif que ma conception si sobre des choses. Je ne conteste pas non plus que les hommes qui ont doté notre science de ses conquêtes les plus importantes aient eu peut-être pour la plupart des vues idéalistes. Sans remonter à l'époque de Leibniz et d'Euler, le langage de Riemann par exemple et maints passages des écrits publiés par lui ou de ses œuvres posthumes montrent qu'il était franchement Idéaliste. Mais la science, c'est-à-dire l'ensemble des opinions, des intuitions et théorèmes adoptés peu à peu par la foule, qui prend part aux recherches on en suit les résultats avec intérêt, qui par le nombre balance peut être la force intellectuelle et gigantesque de quelques initiateurs de génie, enfin dont le jugement est d'autant plus impartial qu'il n'est point dicté par la passion qui domine aux premiers rangs du combat, la science, dis-je, transforme toujours à son profit les résultats des recherches les plus diverses et rejette sans pitié tout élément étranger à son essence même. Elle a accueilli avec gratitude les lois de Képler, mais a laissé de côté sa loi sur les distances des planètes au soleil. Aussi, je suis convaincu que dans son développement ultérieur elle rejettera de la théorie des grandeurs tout ce qui est étranger à la représentation et retiendra seulement ce qui rattache les représentations les unes aux autres. C'est ainsi que de nos jours cette aspiration qui ne fait que devenir plus vive et qui dans les divers domaines de la science tend à la détermination des concepts fondamentaux semble s'être engagée déjà dans une voie essentiellement empiriste, bien qu'elle n'obéisse en cela tout d'abord qu'à des instincts vagues et non aux règles d'un système bien réfléchi. Si nous nous en tenons aux sciences mathématiques, nous constatons que, par exemple, dans l'analyse la conception empiriste l'a depuis longtemps emporté sur les idées fantastiques qui régnaient sur la sommation des séries divergentes, idées propres à l'époque de Leibniz et d'Euler, dont les derniers vestiges se sont conservés durant notre siècle et

émergent çà et là à notre grand étonnement. En géométrie, on a commencé avec grand succès à ramener à nos perceptions même le concept d'espace, ce principe d'ordination très complexe des perceptions et des représentations qui pénètre toutes nos pensées. Sans doute, je l'ai remarqué, les opinions relatives à l'infiniment grand, à l'infiniment petit, aux irrationnelles, à la différentielle, etc., se contredisent parfois encore, mais dès que l'on aura reconnu que le fini suffit à l'édification des mathématiques, c'en sera fait pour toujours de l'infini.

Les mathémaciens seront tous d'accord pour dire : Le suffisamment grand ou le suffisamment petit satisfont aux conditions du problème. Tout homme qui sera à la hauteur de la science n'admettra d'autres quantités *que des quantités suffisamment grandes et suffisamment petites selon les conditions du problème.*

L'IDÉALISTE

39. — **Conclusion.** — En viendra-t-on là ? Mais avant d'opposer le mien au tableau que l'Empiriste fait de l'avenir, j'ai à présenter quelques remarques sur ses fonctions anorthoïdes.

Une fonction à laquelle il est prescrit de prendre une valeur pour les valeurs rationnelles de l'argument, et d'en prendre une autre pour les valeurs irrationnelles est à mes yeux une fonction incomplètement déterminée ou plutôt sa détermination suffisante n'est due qu'à l'existence de l'homme. La condition à laquelle la fonction est assujettie ne la fait pas correspondre à l'ensemble de toutes les valeurs de l'argument. On ne pourrait pas l'imaginer représentée par une figure idéale, comme une fonction donnée par une loi *complète.* Je considère un intervalle d'argument (0, 1). A une longueur partielle quelconque correspond une valeur de fonction, représentée géométriquement par un point. Ce qui est vrai d'une longueur partielle l'est également et au même titre de toutes les longueurs en nombre infini prises dans l'intervalle considéré. Ainsi naît la représentation complète de la fonction complètement déterminée par une loi. Mais ce n'est pas une pareille loi qui distingue les nombres rationnels des irrationnels. Car si grands qu'on prenne les dénominateurs rationnels, il reste toujours entre les deux espèces de nombres une lacune qu'on ne peut combler. Ce sont, au contraire, des fonctions complètes que ces séries choisies par l'Empiriste (art. 37,8), qui représentent des fonctions anorthoïdes ou des fonctions de caractère anorthoïde, parce qu'elles

ne font aucune différence entre les valeurs d'argument, pour lesquelles les valeurs de fonction sont à déterminer. Les points en nombre infini correspondant aux valeurs en nombre infini de l'argument sont *l'équivalent géométrique* de ces fonctions. Je ne dis pas l'image, parce qu'il y a dans cet équivalent quelque chose de non représentable, l'infiniment petit. Prenons une loi anorthoïde, une loi qui, par exemple, donne à la fonction des points singuliers dans tout intervalle si petit qu'il soit, comme cela peut arriver si les maxima et minima se présentent à des instants indéfiniment voisins, et demandons-nous, au point de vue idéaliste : Que sera la distance de deux points singuliers voisins ? Comme je l'ai déjà suffisamment montré, il serait faux de répondre qu'elle a une petitesse illimitée, car ce mot se rapporte à la représentation que nous nous formons et non pas aux distances existant réellement en dehors de nous. Les distances des points singuliers sont *infiniment petites*.

Ainsi, l'équivalent géométrique des fonctions anorthoïdes est, en quelque sorte, la réprésentation de l'infiniment petit.

Pour l'Idéaliste conséquent qui, autant que c'est possible, pose comme fondement l'essence des choses supposées indépendante de l'existence de cerveaux humains, qui, par suite, termine nettement par l'infini les suites de représentations de l'arbitraire ou de l'illimité dans le grand, le petit, l'exact, etc.., la fonction anorthoïde engendre avec une logique inflexible l'infiniment petit. Qu'il ne s'en tienne pas là, et qu'il remonte à la véritable origine du concept de l'infiniment petit, il sera aussitôt conduit à la marche suivie dans le système idéaliste où l'infiniment petit naît déjà de la question sur les différences des longueurs possibles au-dessous d'une longueur donnée. Au contraire l'Empiriste ou celui qui ne se casse pas la tête sur les concepts fondamentaux de l'analyse, n'apprendra par ces fonctions que ceci, c'est que le concept de fonction a atteint son dernier degré de développement.

Les Idéalistes s'éteindront-t-ils un jour ? — je ne le crains pas. Comme Idéaliste j'ai surêment une avance sur l'Empiriste. Quand je tiens mon système pour exact, je n'ai pas besoin de considérer le sien comme faux. Si l'Empiriste aiguise la différence de nos représentations initiales jusqu'à l'opposition de « l'exact parfait et de l'exact à volonté » je ne peux que me réjouir de le voir atteindre avec l'exact à volonté, au même point que moi avec mon exact parfait, car, chaque fois qu'il parvient avec son exactitude approchée à établir les fondements de l'analyse, mon hypothèse initiale de l'exactitude parfaite trouve un appui dans ses résultats. Que l'Empiriste ait en

outre sur certains points plus besoin que moi d'explications détaillées, pour arriver par sa méthode aux théories fondamentales de l'analyse, je ne veux pas interpréter ce fait en ma faveur. Car c'est d'abord le contraire qui a lieu quand il s'agit de poser le problème de la recherche du concept de limite, qui conduit au principe général de convergence et de divergence. Ce sont ici les preuves idéalistes qui sont les plus compliquées parceque prises au fond, elles exigent plus que celles de l'Empiriste, à savoir: l'exactitude parfaite. Mais c'est ensuite un phénomène fréquent que des idées simples en apparence très lumineuses, qui dans une connaissance superficielle, semblent être le principe ordonnateur de tout un domaine scientifique, se montrent tout-à-fait insuffisantes quand on pénètre plus avant et doivent finalement s'effacer devant une théorie pénible, complexe, mais dès ce moment seulement tout-à-fait satisfaisante.

Pour d'autres raisons, je ne crois pas au tableau que l'Empiriste a fait de l'avenir. Il exige de la science quelque chose de contradictoire avec sa propre essence. Il serait bien possible qu'au sein de la science se produisit une doctrine qui fit comme un dogme officiel de la devise favorite de l'Empiriste : « *de représentation en représention seulement* ! » comme il y a au sein des religions des théologies prétendues orthodoxes, les théologiens rendant pourtant hommage aux vues les plus différentes. Mais la science, c'est-à-dire l'ensemble de tous les efforts que fait l'homme poussé par sa soif de connaître, ne rejette que ce qui est manifestement faux. La libre recherche ne s'arrête qu'en présence de la vérité absolument nette, et ne renonce à s'occuper que de problèmes dont il est démontré qu'ils sont dépourvus de sens, comme le perpetuum mobile. Ce qui engendre l'Idéalisme, le désir ardent de dépasser les limites de ce qui est *aujourd'hui* représentable, ne peut pas être condamné par la science, tant qu'on n'a pas tracé les limites nécessaires des recherches humaines.

Ces limites existent-elles, notre besoin d'expansion atteindra-t-il jamais des bornes? A l'égard de la chaîne immense des objets de recherche encore nouveaux, qui se perdent dans le lointain du problème psychique, je pourrais douter que l'humanité ait le temps de remplir sa tâche, mais non pas qu'elle reste essentiellement fidèle à ses aspirations idéales.

Dans la manière de voir des mathématiciens d'aujourd'hui je ne peux découvrir aucun parti pris, certainement pas en tous cas contre les représentations idéales. Si on peut dire en général que c'était l'instinct critique de l'époque encyclopé-

diste (*) qui corrigeait les erreurs des temps de Leibniz et d'Euler, ces aspirations n'ont pas abouti à une épuration définitive des représentations fondamentales mathématiques. Sans doute, ce qui domine aujourd'hui, provoqué par l'exemple des grands mathématiciens de ce siècle, c'est le besoin de rigueur dans les démonstrations et de fondement solide des théories au goût des mathématiciens ; seulement, on ne voit pas trace d'efforts poussés jusqu'à la séparation systématique des hypothèses empiriste et idéaliste. Ce que l'Empiriste pourrait dire dans ce sens, la détermination du concept de la différentielle dans quelques nouveaux travaux, n'a été écrit qu'en vue d'une certaine répugnance à l'égard de l'infiniment petit. Au contraire l'infiniment grand joue en géométrie un rôle plus important que jamais. Les nouvelles recherches les plus profondes sur les concepts fondamentaux, comme celui de l'espace, conviennent aussi bien à l'Idéalisme et à l'Empirisme, et cette opposition ne les a provoqués ni influencés.

(*) Du moins d'Alembert, le mathématicien de l'Encyclopédie, dans quelques pages, dirigées contre le jeune Lagrange, de son opuscule sur la sommation des séries divergentes a opposé des vues tout-à-fait modernes à celles d'Euler sur la convergence.

CHAPITRE II

Considérations finales sur l'Idéalisme et l'Empirisme et sur le concept de limite

40. — Rapport de l'opposition de l'Idéaliste et de l'Empiriste à l'idée qu'on s'est faite jusqu'ici des concepts analytiques fondamentaux. — Je termine là les plaidoyers de l'Idéaliste et de l'Empiriste. Mon but était, en recherchant l'origine cachée des deux formes de pensée généralement répandues, mais fréquemment mêlées, de pouvoir suivre chacune d'elles et avec soin depuis son origine jusqu'à ses dernières conséquences. Que le lecteur s'imagine donc sous les figures de l'Idéaliste et de l'Empiriste, telles que j'ai taché de les lui présenter, des hommes raisonnant avec une précision et une logique égales mais surtout ne reculant devant aucune conséquence de leur raisonnement. En réalité, les théories pures prêchées par eux n'ont guère trouvé ni dans le passé ni dans le présent un seul adepte conscient et parfaitement conséquent. Les études qui ne remontaient pas aux perceptions et à la formation élémentaire des concepts, et qui prenaient au contraire pour base, sans aucun examen, le système de concepts commun aux hommes, tel qu'il s'offre avec son mélange de représentations réelles et verbales, ont fait naître des opinions, des interprétations, des concepts fondamentaux, éclectiques ou mieux accommodés aux circonstances, — mais non pas une théorie. — Dans le cas le plus favorable, des intuitions intermédiaires se substituaient à l'indécision de Leibniz, sans avoir la précision ni la sûreté de ces systèmes principaux. Je ne pense pas qu'après avoir lu attentivement les pages précédentes personne soit embarrassé pour connaître dans un cas donné la manière de voir soit de l'Idéaliste soit de l'Empiriste. Au contraire, il est impossible de deviner quels seront dans les mêmes circonstances les jugements du partisan de systèmes intermédiaires.

Ainsi se montre jusqu'à ce jour dans les intuitions fondamentales une confusion qui règne et qui règnera toujours tant qu'un principe ordonnateur d'un domaine de pensée n'est pas découvert. Qu'on doive le chercher dans la double forme de l'intuition du monde,— cela peut n'avoir pas été remarqué, parcequ'ordinairement on ne tient pour exacte qu'une seule manière de voir, et naturellement c'est la sienne. L'un regarde la ligne continue comme formée de points, pour l'autre cela est absurde. Tel ne voudra pas entendre parler de l'infiniment petit, tel autre le rangera tout de suite parmi ses hypothèses. Un jugement impartial, une volonté sérieuse, pour arriver à une pleine clarté *doivent nécessairement* conduire à l'opposition des hypothèses idéaliste et empiriste. Ce seront dans le désordre des opinions accidentelles comme deux drapeaux qui se dresseront pour grouper auprès d'eux tôt ou tard la plupart des penseurs. Peut-être aussi verra-t-on l'emporter un jour le nombre des indécis ou de ceux qui, par peur d'agiter de pareilles questions, laissent de côté ces problèmes — par une sorte de sacrificium intellectus : Mais les inconséquents, qui forment aujourd'hui une immense majorité ne se trouveront plus un jour que parmi les ignorants,

41. — Le mode d'exposition *neutre* de la théorie des fonctions. — Est-il possible à un parti intermédiaire de ne se ranger à aucune des deux intuitions fondamentales, et quel sera son langage ? Nous traiterons tout de suite cette question importante. Maintenant que nous avons développé les deux intuitions fondamentales logiquement possibles, nous aurons à poursuivre ce principe critique à travers les concepts élémentaires de la théorie des fonctions, aussi loin que cela paraîtra important, en tout cas, au-delà des indications nécessairement brèves de l'Idéaliste et de l'Empiriste. Notre but essentiel est en cela l'exposition exacte des principes fondamentaux de l'analyse dont quelques syllogismes et résultats seulement sont soumis à la critique idéaliste-empiriste. Quel mode d'exposition allons-nous choisir à notre tour, maintenant que nous nous proposons de prendre la parole nous-mêmes ? L'abîme qui sépare les intuitions de l'Idéaliste et de l'Empiriste existe réellement. Il est trop profond et trop vaste pour pouvoir être comblé par des concessions réciproques. Les contre-propositions sont absolument inconciliables. Or, si on a pénétré par la pensée dans les deux formes d'intuition de façon à s'approprier leurs conclusions respectives, on souhaite de voir les théories fondamentales de l'analyse développées et exposées aussi d'une manière logique à l'aide des deux intuitions. On pourrait demander que le titre de calcul infinitésimal fût accompa-

gné de cet avertissement « d'après les principes idéalistes ou empiristes » et s'attendre à ce que la suite de cet ouvrage en donne un premier exemple.

Nous croyons pouvoir offrir quelque chose de plus satisfaisant. Les principes généraux, d'après lesquels un chapitre de la théorie des fonctions doit être rédigé à la manière de l'Idéaliste ou de l'Empiriste, sont complètement mis au net, et nous aurions maintenant à en montrer l'application dans les cas particuliers.

Il nous faudrait donc nous décider en faveur d'un des deux systèmes et nous efforcer de gagner le lecteur pour le système que nous aurions choisi. Mais le fait est que nous nous savons hors d'état d'assurer la victoire à l'une des intuitions fondamentales ; elles sont à nos yeux également autorisées à servir de base à la science. Nous aimerions donc mieux, même si nous nous étions décidé pour l'un des deux systèmes, donner à notre exposition, si c'est possible, une forme qui contentât à la fois l'Idéaliste et l'Empiriste. Il faudrait d'ailleurs qu'elle suffît alors au besoin de rigueur du lecteur qui ne possède le concept de grandeur qu'à son premier degré d'abstraction. Mais par quelle espèce d'exposition y parviendrons-nous ? A cette question, il n'y a qu'une réponse.

Puisqu'un mode d'exposition convenant à la fois aux conceptions idéaliste et empiriste n'est pas possible, il en faut chercher un qui ne se compose que de ce qui ne contredit aucune des deux manières de voir. Cela impose à l'exposition *neutre* les restrictions suivantes :

Doivent être mis hors d'usage tous les concepts qui ne répondent qu'à une des deux intuitions fondamentales. Ainsi d'abord toute la métaphysique idéaliste, l'infiniment grand et l'infiniment petit, et ce qu'une étude plus profonde nous révèle comme étant une fiction idéaliste. Nous devons, pour éviter les protestations de l'Empiriste ne pas quitter le domaine du représentable. Nous userons de l'idée empiriste de l'exact à volonté, comme des fictions idéalistes ; l'exposition neutre la laissera de côté. Au contraire nous appliquerons les concepts tels que grandeur, valeur, longueur, étendue, intervalle, comme ferait l'Idéaliste. L'Empiriste peut être tranquille parce que ces expressions contiennent implicitement la double interprétation.

Je me servirai donc, en me conformant à ces restrictions, du langage purement empiriste (*). Il a l'avantage de n'être jamais contestable puisqu'il n'emploie pas les expressions

(*) Excepté dans le dernier art. du chap. V.

désignant d'autres concepts que ceux qui sont abstraits des perceptions ou qui peuvent s'y ramener. Les périphrases qui doivent se présenter ça et là à la place des désignations brèves de l'Idéaliste semblent bien donner au langage quelque chose de traînant, mais il pourra être intéressant d'apprendre à connaître une théorie, où l'opposition des deux intuitions fondamentales joue un rôle si important, dans un langage débarrassé de tous les idéaux.

Quant à ce qui concerne au contraire le développement logique d'une pareille théorie et de ses démonstrations, il devra être fait à la manière idéaliste, puisque nous n'excluons pas la représentation de grandeur idéaliste, quand nous parlons de valeurs. Il faudra, en effet, des preuves donnant satisfaction à l'Idéaliste qui croit à l'exact absolu, suffisant à fortiori à l'Empiriste qui ne parle dans les rapports de grandeur que d'un exact à volonté.

Ainsi donc : langage empiriste, preuves idéalistes.

42. — Vue d'ensemble sur la suite de notre étude. — Cette devise entre en vigueur dans le dernier article de ce chapitre, qui traite des limites des suites de quantités discontinues, et dans les trois chapitres suivants sur l'argument, la fonction, et la marche finale des fonctions. Dans la détermination de son concept d'argument, l'Empiriste s'est déjà heurté à une difficulté qu'il a, en vérité, facilement aplanie. En pénétrant dans la nature de l'argument, l'esprit neutre voit avec clarté que précisément ici le dualisme des deux intuitions a une efficacité énorme s'étendant à des questions scientifiques qui jusqu'ici ne faisaient pas soupçonner des considérations remontant aussi loin. Naturellement l'opposition de l'argument de l'Idéaliste et de l'Empiriste domine aussi le concept de fonction dont nous pouvons maintenant seulement épuiser le contenu. Chemin faisant nous ne passerons pas sous silence ce qui se trouvera sur notre route des principes fondamentaux essentiels de la théorie générale des fonctions. La « marche finale des fonctions » pour les valeurs indéfiniment croissantes de l'argument sera enfin soumise à une analyse scrupuleuse. A la théorie de cette marche finale appartient le principe général de convergence et de divergence, et en le discutant nous mettrons la dernière main au concept de limite.

Si nous jetons un regard sur le chemin parcouru et sur celui qu'il nous reste à parcourir, nous voyons que notre objet essentiel a été jusqu'à présent le concept de grandeur, pour la délimitation précise duquel nous avons considéré la limite de

la fraction décimale comme cas simple du concept de limite ; désormais le concept de limite lui-même viendra au premier plan. Avec les derniers articles de ce chapitre et les chapitres suivants dont nous venons d'esquisser rapidement le contenu, nous mettons le pied sur le sol mathématique.

Il reste donc encore une lacune à combler dans cette étude sur les premiers concepts de la pensée exacte. Comme nous l'avons fait pour le concept de grandeur, il faut aussi que par rapport au concept de limite nous tâchions de remonter à son origine et de fixer son contenu naturel. L'étude de l'origine problable d'un si puissant domaine de pensée, de son étape naïve et de son étape scientifique, de sa Paléogénêse, comme on pourrait dire d'un mot, présente un grand charme. Mais ce qui nous remplit d'une profonde satisfaction, c'est la netteté et la transparence qu'acquiert le concept, lorsque par le concours des perceptions dont il dérive, il naît pour ainsi dire sous nos yeux.

43. — Premier degré de développement du concept de limite. — La Paléogénêse du concept de limite est semblable en général à celle du concept de grandeur ; cependant elle a son individualité et ce n'est qu'au terme supérieur de son développement que les deux concepts se rejoignent. Voici en résumé comment nous avons fait naître le concept de grandeur.

Nous avons commencé par distinguer le concept de grandeur linéaire comme fondement de la comparaison exacte et des combinaisons mathématiques. Ce concept de grandeur linéaire lui-même offre au premier coup d'œil deux degrés d'abstraction : tout d'abord, c'est la représentation de grandeur naïve, puis il s'en forme une, affinée par la science de la mesure, et s'adaptant aux fins d'une comparaison savante.

Seulement s'il suffit dans la plupart des recherches sur les concepts d'avoir décrit ces deux degrès de développement qui sont sans doute à distinguer pour tous les concepts fondamentaux devenus utiles à la science, le concept de grandeur apprend qu'il ne faut pas s'en tenir là. Il s'y joint, en effet, une certaine suite fermée de représentations, qui y est liée d'une façon inséparable, ce qui fait que l'étude de ce concept nous fait remonter aux premières perceptions et à notre processus intellectuel. Il s'agit de la réunion non pas d'un certain nombre de quantités en une seule, mais d'un ensemble illimité de quantités de plus en plus petites, également en une seule, — qui donne ce qu'on appelle la limite, — bref c'est le concept de limite, ou au moins c'en est une partie.

Pour compléter le concept de grandeur au sens du concept de limite, et réunir les deux formes de pensée en une seule

rigoureuse, il faut faire atteindre à l'abstraction un troisième degré, celui qui appartient à la théorie de la connaissance. — C'est ce qui a eu lieu dans le débat de l'Idéaliste et de l'Empiriste. Mais, du même coup, la métaphysique du concept de limite est évidemment épuisée, ou mieux, par l'étude psychologique du concept de limite, qui saute par-dessus les premières étapes de ce concept, l'examen du concept de grandeur se trouve terminé. En tous cas, nous pouvons regarder comme atteint par le concept de limite le degré où il appartient à la théorie de la connaissance, de sorte qu'il ne nous reste plus qu'à jeter un regard en arrière sur son origine.

Ainsi donc, comme pour le concept de grandeur nous distinguerons dans le développement d'une forme d'intuition aussi générale qu'est le concept de limite, un degré primitif et un degré scientifique. La composition de ce concept est quelque chose de très-remarquable.

C'est d'abord clairement un ensemble d'abstractions tirées du monde extérieur et du monde intérieur (ou psychique) des phénomènes. La limite est le terme conforme à l'expérience d'un phénomène dont la variation progressive n'a pas de terme dans l'expression sensible ni dans la suite des représentations qu'engendre cette impression. L'obscurité de la nuit qui croît pendant assez longtemps est la limite de la clarté évanouissante du jour, celle-ci inversement est la limite de l'obscurité qui s'en va. L'arrêt final d'un pendule, le tarissement d'une source ; d'un autre côté, le grossissement maximum des eaux, la furie extrême de la tempête, le jour le plus long, la nuit la plus longue de l'année, bref la fin de toute variation à peine sensible qui semble se continuer sans fin et à perte de vue dans la représentation qu'elle suscite. mais qui pourtant d'après l'expérience finit par cesser complètement ou par atteindre son maximum, — voilà des exemples du processus de l'idée de limite, dont il est question.

Ainsi donc, par ces perceptions élémentaires un phénomène psychique et un phénomène variable s'unissent réellement en une intuition.

Cette suite d'idées est pleinement mise en lumière par le fameux sophisme de la philosophie grecque, dont toute la force réside dans la séparation des deux phénomènes.

Je veux parler du raisonnement de Zénon suivant, lequel un objet qui possède un mouvemeut uniforme ne peut parcourir une étendue ; la flèche qu'on a lancée ne peut, par exemple, atteindre la cible. (*)

(*) Le raisonnement de Zénon tel qu'il est généralement conue se rattache à la course qu'il fait faire à Achille et à la tortue. Dans le

La flèche décochée doit parcourir successivement la moitié, les trois quarts, les sept huitièmes, etc. — de la distance qui sépare le tireur de la cible. Si nombreuses que soient les portions de cette distance qu'elle a déjà franchies; elle en a toujours un nombre illimité devant-elle ; mais puisqu'elle doit les avoir parcourues toutes pour atteindre le but, elle ne peut évidemment jamais l'atteindre.

Ce sophisme peut-être refuté de deux manières : On peut dire que le temps nécessaire pour parcourir les fractions d'étendue $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots$ diminue dans le même rapport que ces fractions ; que, par suite, le nombre illimité de points de divisions $\frac{2^n-1}{2^n}$ sera parcouru dans un temps fini. — Ou bien encore on objecte avec plus de justesse que le partage du chemin en portions de la forme $\frac{2^n-1}{2^n}$ est une opération arbitraire et que la flèche en réalité parcourt l'un après l'autre les quatre quarts ou les huit huitièmes, etc... de son chemin, mettant d'ailleurs des temps égaux à parcourir les fractions égales. De ces points aussi peu éloignés qu'on veut les uns des autres le sophisme tire sans aucun fondement réel une série particulière.

De telles objections sont bien contradictoires avec la conclusion du sophisme, mais elle ne l'éclaircissent pas, elle ne découvrent pas la faute du raisonnement. Cette faute se cache plus profondément.

Le paradoxe dit bien que la flèche devant parcourir en réalité les points $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8} \cdots$ etc., indéfiniment, occupe toujours dans notre représentation la même situation en tant qu'elle a encore devant elle un nombre illimité de points à parcourir. Dans ce fait rien ne peut jamais changer. Or, tout-à-coup, la flèche sort de cette suite de représentations, et, absolument sans transition, est fixée à la cible.

C'est donc là qu'est le point faible, le paradoxe, c'est dans l'opposition que présentent d'une part une suite de représentations, qui par sa nature est illimitée, et par conséquent non

---

problème de la flèche, Zénon traite un autre point. Bien que ceci ne soit pas essentiel pour nous, observons que ces raisonnements ne sont pas à l'origine donnés pour des sophismes, mais servent d'appui à la philosophie de Zénon. (comparer Zeller — La philosophie des grecs I, les Eléates, traduit par Boutroux).

seulement n'exige pas de terme mais n'en possède aucun — et d'autre part, le fait matériel qui met fin à cette suite de représentations.

Cette combinaison de représentations, dont la séparation prend la forme d'un sophisme, se fond par l'habitude en une seule *forme d'intuition*, sur laquelle on ne réfléchit pas, et qui appartient au système de réprésentations de mots, telle que limite, fin, terme etc..., absolument comme l'infini, l'exact, l'invariable de forme et d'autres représentations de limite, qui désignent des limites, non nécessairement existantes dans le monde extérieur, de purs phénomènes de pensée, mais à l'existence desquelles nous concluons, parceque le monde des phénomènes réels nous a habitués aux limites.

Mais, jusqu'ici, il n'a été question qu'en partie du concept primitif de limite. Il vient s'y ajouter quelque chose. Nous connaissons aussi l'accroissement sans fin, la variation sans terme. Le mouvement en cercle peut n'être jamais arrêté, l'alternance des saisons et la succession des étoiles semblent éternelles. Ainsi il nous faut encore admettre dans cette forme d'intuition la *nature des variations qui comporte ou qui exige une limite.*

On ne s'attache pas à trouver dans l'intuition de tous les hommes des déterminations exactes de cette nature de variation. Pourtant le sentiment distingue des phénomènes tels que l'accroissement du temps de ceux où un certain maximum est atteint — comme la croissance d'un arbre: *Est modus in rebus, sunt certi denique fines.* On pourra donc regarder comme appartenant aussi au système de représentations de l'homme primitif, — quoique sous une forme moins précise, — ce principe que une quantité qui ne fait que croître ou décroître tend vers une limite,si elle ne varie pas au-delà de toutes limites Le concept primitif de limite a donc en général le contenu que voici: Des phénomènes sans nombre consistent dans des variations que nous ne sommes pas en état de poursuivre jusqu'à leur fin, ni par la perception des sens, ni par la pensée; et pourtant ils ont une limite. Comment elle est atteinte, notre représentation ne saurait le dire. — D'autres phénomènes, au contraire, n'ont pas de terme.

Et deuxièmement: il y a dans la nature de la variation des conditions qui entraînent la nécessité de la limite pour le phenomène.

Le concept de limite se décompose donc en deux parties essentielles : l'existence de la limite, puis la nature des conditions sous lesquelles une variation a une limite.

44. — Le concept scientifique de limite. — Le concept qui est ainsi une abstraction primitive tirée aussi bien des perceptions internes que du monde extérieur, va nous amener aux représentations engendrées absolument par le processus de la pensée, et ainsi naîtra le concept scientifique de limite. Il se rapporte tantôt à des limites de suites de valeurs individuelles, comme c'était le cas le plus fréquent dans la mathématique des anciens, — (par exemple, dans les questions de la circonférence du cercle considérée comme limite de périmètres de polygones, et dans les quadratures d'Archimède) ; tantôt la limite est le terme de suites de valeurs continues, comme dans la question de la tangente, — limite de la sécante, et des nombreuses limites du calcul différentiel qui est sorti du problème de la tangente. Mais dans la théorie abstraite des grandeurs l'existence de la limite est toujours tirée simplement et sans discussion du concept primitif de limite. Ce qui est l'objet d'un problème scientifique, c'est seulement la nature des suites de quantités, qui comportent une limite, et il s'agit là de règles pratiques, du critérium de convergence des opérations infinies sous des hypothèses très restreintes, et non pas d'un principe général embrassant toutes les suites de quantités possibles.

En désignant par suites asymptotiques celles qui ont une valeur asymptotique, c'est-à-dire une limite, et sans excepter le cas où la suite oscille autour de sa valeur asymptotique — nous pourrons déterminer comme il suit le contenu naturel du concept *scientifique* de limite.

Il comprend l'idée de limite dans le sens où l'entendaient l'Idéaliste et l'Empiriste, c'est-à-dire les preuves qu'ont fournies les deux intuitions fondamentales pour l'existence de la limite de suites asymptotiques aussi simples que possible, et en outre les conditions nécessaires pour qu'une suite donnée soit asymptotique.

Ainsi compris le concept de limite n'était jusqu'ici pas encore à l'ordre du jour dans le problème que la mathématique moderne s'est posé, et qui a pour objet d'assurer ses propres fondements : et ce n'était pas seulement la démonstration de l'existence de la limite qui n'y figurait pas, il en était de même du théorème décisif sur le caractère asymptotique d'une suite que j'ai appelée *principe général de convergence et de divergence*. On y avait si peu réfléchi que, en 1871, j'ai été obligé pour une démonstration d'éclaircir un cas particulier du principe (à savoir que une série $u_1+u_2+..$ converge si l'ensemble de Cauchy $u_m + u_{m+1} + \ldots + u_n$ tend toujours vers zéro, m et n croissant indéfiniment.) (*)

(*) Mon programme d'entrée à l'Université de Fribourg, p. 2.

Le concept scientifique de limite est donc complété au sens que nous avons indiqué par la démonstration que donne le chapitre V du principe général de convergence et de divergence. Nous bornerions là ces considérations générales sans le souvenir de quelques difficultés qui ont une fois enrayé notre marche, et dont je vais faire mention pour finir, —pour qu'elles achèvent de donner une idée exacte de ces *recherches* sur les concepts.

45. — Des limites de suites discontinues et continues. — Ayant reconnu que la limite ne possède pas l'évidence d'une perception directe, je ne négligeai aucun moyen accessible pour en démontrer l'existence. C'eût été vraisemblement une découverte merveilleuse. Tout effort cependant fut vain, il ne me restait de cette première partie de mes recherches que les deux démonstrations de l'Idéaliste (art. 21) avec leur réfutation.— J'en déduisis que l'impossibilité de démontrer la limite pouvait seule donner le problème de la théorie critique de la connaissance, correspondant au 3e degré d'abstraction du concept de grandeur.

A la vérité ce problème ne résultait pas encore exclusivement de l'impossibilité de la démonstration de la limite. Je crus d'abord devoir chercher un passage à la limite d'une certaine nature toute simple, d'où les autres limites puissent se déduire par combinaison. Et ma recherche s'est trouvée arrêtée par cette opinion que la formation de la limite est un concept distinct suivant qu'elle procède de suites discontinues ou continues, de sorte que pour chacun des deux cas il faut trouver la forme simple fondamentale. Tout au plus la limite des suites discontinues serait à considérer comme impliquée dans celles des suites continues. Pour cette raison beaucoup de preuves qui s'offraient à moi pour l'existence de la limite des suites continues, sous l'hypothèse de la limite de la fraction décimale, provoquèrent ma profonde méfiance. Mais alors, je fis cette observation : Si je voulais, sous l'hypothèse de la limite d'une certaine succession continue, démontrer les théorèmes généraux, les démonstrations impliqueraient inévitablement, sous une forme quelconque, la suite de quantités discontinues. Celle ci était toujours là. Je m'appliquai finalement à considérer cette apparition comme une propriété de notre pensée, qui non seulement, comme on le sait, résout la continuité dans une variation s'effectuant par sauts (*), mais

(*) Dans les perceptions de la vue, le mouvement saccadé de la prunelle qui s'observe dans la contemplation d'un objet étendu est un signe extérieur de cette propriété de la pensée, mentionnée dans le texte. Les

encore fait naître la limite des phénomènes continns de point de repos discontinus de la pensée attentive. Cela est incontestablement en faveur d'une véritable uniformité des représentations sans fin. Car la limite, comme longueur déterminée, ne peut être que la représentation finale, de même nature que les précédentes, d'une suite de longueurs également déterminées.

J'ai dit (Introduction) que, une fois disparue toute obscurité sur la limite de la fraction décimale, la voie serait ouverte et l'analyse serait maîtresse chez elle. Cela signifie maintenant : le théorème sur l'existence d'une suite particulière discontinue, la fraction décimale, par exemple, doit suffire pour qu'on en déduise à l'aide de la mathématique ordinaire les principaux théorèmes sur la fonction en général et le principe général de convergence et de divergence. D'après la remarque précédente cela ne peut pas nous étonner, et les chapitres suivants en donnent la preuve. Mais, comme ainsi la limite des suites discontinues demeurait seule indémontrable, je me trouvai placé directement en présence du troisième degré du concept de limite, celui qui appartient à la théorie de la connaissance. Le problème réduit à la limite de la fraction décimale devait donc faire naître cette question : Si les quantités discontinues qui doivent avoir une limite en restent éternellement distinctes, comment peuvent-elles déterminer cette limite ? Quel rapport doit-on se représenter entre *leurs valeurs isolées* et leur limite. On ne peut s'en représenter aucun, et on tombe ainsi sur cette solution que, ou bien elles finissent par se mêler avec la limite en une représentation unique, (intuition empiriste); ou bien leur différence cesse d'appartenir au domaine de représentations de l'homme (intuition idéaliste), ce qui résout le problème définitivement.

La suite des idées que j'ai tracée convient aux applications, parcequ'elle a pour résultat un mode de démonstration uniforme pour les limites, qu'il s'agisse de variation continue ou de suite de valeurs discontinues. Les démonstrations se ramèneront dans tous les cas à la formation de la limite de valeurs

---

autres sens nous effrent quelque chose de semblable. Dans le son variable de la sirène, je distingue toujours des sons qui restent les mêmes un certain temps et qui, selon toute vraisemblance, se fixent dans notre cerveau pendant quelques instants, nous empêchant alors de saisir la variation de son. Notre attention qui se réveille subitement et la fatigue de notre attention qui se reproduit périodiquement font dominer pendant un certain temps les impressions reçues et donnent ainsi naissance à la discontinuité de la perception. Cette discontinuité est peut-être la cause physiologique de notre penchant à résoudre le continu en variations brusques.

discontinues, et de suites aussi simples que possible, comme le sont les fractions décimales. Ainsi prend naissance une méthode de démonstration permettant de fréquentes applications que je nomme *constructions numériques*. Nous allons, dans l'article suivant, appuyer ce qui précède par des exemplse, après avoir résumé les résultats numériques de notre étude antérieure.

46. — Comparaison des limites des suites de valeurs discontinues. — I. A l'égard de la limite de la fraction décimale, le résultat de l'étude précédente est le suivant :

Si on pose

$$x_n = 0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \,,\ \alpha_p = 0, 1, 2 \ldots 9$$

il existe toujours une quantité x de telle nature que $x - x_n$, pour des valeurs suffisamment grandes de n, reste au-dessous d'une valeur choisie aussi petite qu'on veut.

Nous écrivons :

$$x = lim_{n=\infty}(0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n) = 0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots$$

et l'on a

$$x - x_n = 0, 0 \ldots \alpha_{p+1} \alpha_{p+2} \ldots < 10^{-p}$$

si tous les α, à partir de α_{p+1}, ne sont pas des 9 ; — on aurait :

$$x - x_n = 10^{-p}.$$

si tous les chiffres étaient des 9.

Nous pouvons imaginer la *lim.* x à la manière de l'Idéaliste ou de l'Empiriste, sans que cela ait aucune influence sur la marche et les résultats de nos recherches analytiques. Aussi laisserons-nous de côté cette différence, excepté là ou il est précisément question d'elle. Il faut ensuite remarquer que si dans les applications de ce théorème on fait intervenir tôt ou tard une loi déterminant la suite des α, cette hypothèse n'est nullement nécessaire pour la validité générale des preuves fondées sur l'existence de la limite de la fraction décimale. Pour l'Empiriste cela tient à ce qu'il suffit que les α puissent être donnés indéfiniment, pour que la détermination de la limite soit aussi exacte que l'on veut. Pour l'Idéaliste, cela tient à ce que si réellement la suite des α était sans loi jusqu'à l'infini, sa limite existerait tout de même au sens idéaliste.

La question relative à l'essence du nombre irrationnel et à son rapport au nombre rationnel pourrait être également résolue par ce théorème. Pour résumer la marche de nos idées, autant qu'elle a trait à la représentation des quantités irrationnelles, rappelons que le *nombre*, c'est-à-dire le nombre rationnel, est aux parties correspondantes de l'étendue unité (prise pour type des quantités linéaires) ce que le mot est à un

concept ou à une représentation. Mais il en est aussi de même des irrationnelles qu'on doit tenir pour équivalentes à la formule d'après laquelle se fait leur développement. Or donc, à cette formule aussi correspond une longueur limite, comme au nombre une fraction rationnelle de l'unité.

L'irrationnelle est ainsi comme le nombre rationnel une quantité mathématique linéaire, et la différence entre les deux consiste en ce que le nombre irrationnel est une longueur limite de nombres rationnels, de sorte qu'il y a entre eux un passage à la limite. Seulement cela n'entraîne pas une différence essentielle. Car notre représentation de longueurs rationnelles et irrationnelles est de même nature, — aussi bien pour l'Idéaliste que pour l'Empiriste. Ce sont des morceaux quelconques d'une quantité mathématique linéaire. Rien ne les distingue donc, que leur détermination numérique, c'est-à-dire leur origine *accidentelle*. Je dis accidentelle, parceque des déterminations de ce genre devraient faire paraître des espèces innombrables de longueurs irrationnelles comme différant de nature autant que diffèrent les longueurs rationnelles des irrationnelles. Ainsi des longueurs peuvent être rationnelles ou irrationnelles par rapport à des longueurs données comme irrationnelles, elles peuvent être, par exemple, des longueurs limites d'une suite de longueurs irrationnelles, et ainsi de suite. L'unique différence réellement *essentielle*, qu'on puisse imaginer dans la détermination numérique d'une grandeur, concerne l'absence de loi ou la conformité à une loi pour les suites des nombres. Les suites sans loi, quand on les accepte comme possibles avec l'Idéaliste, sont en vérité franchement irrationnelles, seulement elles ne constituent qu'un cas limite du concept de l'irrationnalité. Nous aurons souvent affaire dans cet ouvrage aux différents modes de détermination numérique des irrationnelles mais le concept de nombre me semble complètement mis au net par ce qui précède, et nous ne nous en occuperons plus.

II. — J'ai montré dans l'article précédent que le concept de limite se rattache par sa nature aux suites de nombres, c'est-à-dire aux suites de quantités discontinues, c'est pourquoi non-seulement toute limite, comme c'est facile à montrer, peut s'exprimer comme limite de suites de nombres, mais encore la démonstration des limites hypothétiques de phénomènes continus dans les théorèmes élémentaires de la théorie des fonctions, se fait toujours vraisemblablement par la *construction numérique*, comme j'ai nommé cette méthode. Si nous possédons une espèce de suites de nombres, dont on puisse prouver qu'elle s'approche de toute limite possible, la démons-

tration spéciale de l'existence des limites devra pouvoir se faire en ramenant les suites de valeurs qui doivent posséder une limite aux suites de nombres de l'espèce considérée. Notre tâche sera donc tout d'abord de rechercher, parmi toutes les espèces de suites de ce genre, celle qui est aussi intuitive, aussi familière que possible. Par l'établissement d'une pareille espèce de suites fournissant toute limite, nous serons ramenés en réalité à la forme la plus simple et présentant le plus petit nombre de cas particuliers, à laquelle l'axiome idéaliste sur l'existence des limites puisse se rattacher.

Il s'offre à nous tout d'abord la suite la plus générale de fractions rationnelles non décroissantes, à dénominateurs croissants.

$$\frac{z_1}{n_1}, \frac{z_2}{n_2}, \ldots\ldots$$

où $z_1 < n_1$, $z_2 < n_2$, etc., $n_1 < n_2 < \ldots$, $\frac{z_1}{n_1} \leqq \frac{z_2}{n_2} \leqq \ldots$

C'est une suite d'étendues ne variant que pour croître et toujours inférieures à l'unité, qui, d'après leur mode de formation, à partir d'une valeur suffisamment grande n_p, ne peuvent augmenter que de quantités dont la petitesse est choisie à notre gré. Cette sorte d'accroissement est, en vérité, assez aisée à montrer, mais elle ne saute pourtant pas aux yeux sans explication, de sorte que la suite susdite doit céder le pas à d'autres plus simples encore.

Si les dénominateurs n_1, n_2, forment une série géométrique telle que l'unité soit divisée en n_1 parties, chacune de ces parties le soit ensuite en n_1 parties et ainsi de suite, il existe une série très nette de nombres, dans laquelle la venue de la limite atteint le plus haut degré d'évidence intuitive.

D'abord toute longueur (ou limite) peut être regardée comme limite d'une pareille suite. Posons $n_1 = \alpha$ et supposons donnée la longueur $L < 1$; il existe alors un nombre entier $\alpha_1 < \alpha$ tel qu'on ait $\frac{\alpha_1}{\alpha} \leqq L \leqq \frac{\alpha_1 + 1}{\alpha}$. Il y a ensuite un nombre entier $\alpha_2 < \alpha$, tel que $\frac{\alpha_2}{\alpha^2} \leqq L - \frac{\alpha_1}{\alpha} < \frac{\alpha_2 + 1}{\alpha^2}$ etc., jusqu'à $\frac{\alpha_{p+1}}{\alpha^{p+1}} \leqq L - \left(\frac{\alpha_1}{\alpha} + \frac{\alpha_2}{\alpha^2} + \ldots + \frac{\alpha_p}{\alpha^p}\right) < \frac{\alpha_{p+1} + 1}{\alpha^{p+1}}$. La différence $L - \left(\frac{\alpha_1}{\alpha} + \frac{\alpha_2}{\alpha^2} + \ldots + \frac{\alpha_p}{\alpha^p}\right)$ a donc la limite zéro. Cela saute surtout au yeux si on suit ce raisonnement sur une figure.

Ainsi donc si une opération f(x) a une limite $y < 1$, celle-ci

doit aussi pouvoir être regardée comme $lim\left(\frac{\alpha_1}{\alpha}+\frac{\alpha_2}{\alpha^2}+\ldots+\frac{\alpha_p}{\alpha^p}\right)$.

Il s'agit encore de savoir quel est le choix le plus convenable qu'il faut faire des α. Supposons $\alpha = 2$; nous obtenons alors la suite de nombres la plus sommaire. A l'égard de son image géométrique, que peut-il y avoir de plus simple que de diviser sans cesse par 2? Les quantités α_1, α_2, ... ne pouvant être que 0 ou 1 sont les plus petites possible, de sorte que l'axiome appliqué à la forme

$$\frac{\alpha_1}{1}+\frac{\alpha_2}{4}+\frac{\alpha_3}{8}+\ldots$$

se rapportera aussi au plus petit nombre possible de séries. Ce sont là incontestablement de grands avantages du système de numération dyadique — qui tenait tant à cœur à Leibniz, et on s'en servira toujours volontiers dans les leçons au tableau à cause de sa simplicité intuitive. Mais, dans une exposition écrite, il pourrait être plus convenable de prendre $\alpha = 10$, c'est-à-dire d'appliquer, comme nous l'avons fait jusqu'ici, le système décimal, qui éveille en nous des représentations arithmétiques bien plus familières que le système dyadique.

III. - Pour terminer, donnons comme exemple de construction numérique la preuve de la limite d'une suite discontinue de quantités ne variant que dans le sens de l'accroissement, mais n'augmentant pas indéfiniment; c'est un des cas les plus importants et le plus souvent utilisés dans les démonstrations de la théorie des fonctions. Soit donc :

$$x_1 \leqq x_2 \leqq x_3 \quad \ldots\ldots$$

ces quantités x devant rester inférieures à une valeur déterminée, sans être jamais toutes égales — à partir de quelque rang que ce soit.

Soit d'abord $\alpha_0 + 1$ le *plus petit* nombre entier que ne dépassent pas les quantités x_1, x_2 ;.... Elles doivent alors finir par dépasser α_0 ; désignons par ξ_0 le premier des x_p qui remplit la condition

$$\alpha_0 < \xi_0 < \alpha_0 < 1$$

tous les $x_p > \xi_0$ satisfont de même à cette inégalité.

Soit ensuite $\alpha_1 + 1$, où $\alpha_1 < \alpha$, le plus petit nombre de fractions $\frac{1}{\alpha}$ de l'unité, qui n'est pas dépassé par les quantités de la suite $x_1 - \alpha_0$, $x_2 - \alpha_0$,... Ces différences, qui d'après la première hypothèse finissent par être positives, devront finir

par dépasser $\frac{\alpha_1}{\alpha}$. Désignons par $\xi_1 - \alpha_0$ la première de ces différences qui remplit la condition

$$\frac{\alpha_1}{\alpha} > \xi_1 - \alpha_0 < \frac{\alpha_1 + 1}{\alpha}$$

nous écrivons, en nous conformant aux règles ordinaires de numération écrite,

$$\alpha_0 , \alpha_1 < \xi_1 < \alpha_0, \alpha_1 + 1$$

Tous les $x_p > \xi_1$ satisferont de même à cette inégalité.

Soit en troisième lieu $\alpha_2 + 1$, où $\alpha_2 < \alpha$, le plus petit nombre de fractions $\frac{1}{\alpha}$ de $\frac{1}{\alpha}$, c'est-à-dire de fractions $\frac{1}{\alpha^2}$ de l'unité, qui n'est pas dépassé par les quantités $x_1 - \alpha_0, \alpha_1$, $x_2 - \alpha_0, \alpha_1 \ldots$ Ces quantités, qui d'après la deuxième hypothèse finissent par être positives, finiront aussi par dépasser $\frac{\alpha_2}{\alpha^2}$. Désignons par $\xi_2 - \alpha_0, \alpha_1$ la première de ces différences qui remplit la condition :

$$\frac{\alpha_2}{\alpha^2} < \xi_2 - \alpha_0 \alpha_1 < \frac{\alpha_2 + 1}{\alpha_2}$$

$$\text{ou } \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2, < \xi_2 < \alpha_0, \alpha_1 \overline{\alpha_2 + 1}$$

Tous les $x_p > \xi_2$ satisferont de même à ces inégalités et ainsi de suite....

Je remarque que la preuve empiriste se trouve par là achevée. Car la suite des $\alpha_0 ; \alpha_0 . \alpha_1 ; \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 ; \ldots\ldots$ ayant une limite aussi exacte qu'on veut, (qu'on peut, par exemple, supposer atteinte par $\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p$) les x ne dépasseront pas de $\frac{1}{\alpha^p}$ la limite de la fraction $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_p$, Mais $\frac{1}{\alpha^p}$, quand p augmente, peut-être rendu aussi petit qu'on veut ; donc les x ont pour l'Empiriste une limite, qui ne peut dépasser d'une étendue donnée avec autant d'exactitude qu'on veut la limite de la fraction α_0 , $\alpha_1 \alpha_2 \ldots\ldots$; les x et les $\alpha_0; \alpha_0, \alpha_1;$ etc. ont donc la même limite.

L'Idéaliste a besoin de formuler plus exactement l'égalité des limites, de manière à montrer leur différence comme *infiniment petite.*

La suite illimitée de quantités $x_1, x_2, \ldots$ donne une détermination unique pour une suite de nombres également illimitée $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$

soit $\times = \alpha_0 , \alpha_1 \alpha_2 \ldots$ in inf.

Nous avons trouvé que pour toute valeur arbitraire de p il existe un nombre r minimum pour lequel on ait

$\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p < x_q < \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{p+1}, q = r, r+1, \ldots$
ou bien en diminuant le côté gauche et augmentant le droit, tel que $X - \frac{1}{\alpha^p} < x_q < X + \frac{1}{\alpha^p}$

qu'on fasse croître p indéfiniment, r croît aussi et par suite q, au delà de toute limite, et la différence $X - x_q$, qui est inférieure à $\frac{1}{\alpha_p}$ tombe au-dessous de toute borne, ou devient pour l'Idéaliste *infiniment petite.*
Par suite,

$$lim\ x_p = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots = X$$

Dans toutes les constructions numériques la preuve empiriste peut de cette façon être considérée comme complète, plus tôt que la preuve idéaliste, et il suffira de l'avoir montré une fois.

Le développement de la fraction décimale $\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots$ est ce que nons entendons par *construction numérique* de la limite lim $x_p = X$. La proposition établie ci-dessus est un cas particulier de la suivante, à laquelle elle sert de fondement. Si deux suites $x_1, x_2, \ldots$ et $y_1, y_2 \ldots$ sont de telle nature que leurs différences $x_p - y_q$ restent au-dessous d'une petitesse arbitrairement choisie, quand p *et* q ont dépassé une valeur suffisamment grande, chacune des deux suites a une limite, et les deux limites sont les mêmes. Cette proposition est de nouveau comprise dans la quatrième du 3me article, chap. V ; inutile donc d'en donner une démonstration particulière.

Ainsi armés, entrons dans l'étude des concepts fondamentaux analytiques plus restreints, de l'argument et de la fonction.

CHAPITRE III

L'argument

47. — Remarques préliminaires et vue générale. — Pour l'Empiriste et l'Idéaliste, une *valeur particulière* de l'argument est une longueur qui va d'un point initial fixe à un point final arbitraire, longueur qui peut toujours s'exprimer en fonction de l'unité de longueur, à l'aide d'un nombre au sens général, c'est-à-dire à l'aide d'un nombre rationnel ou de la limite d'un pareil nombre. C'est pourquoi, au seuil de la théorie des fonctions, nous nous réservons la liberté d'imaginer l'argument suivant le besoin du moment, ou à volonté, soit comme extrémité de longueur, c'est-à-dire comme un *point* définissant une distance, soit comme un *nombre*, c'est-à-dire comme un rapport numérique à une unité de longueur.

Bien que la représentation géométrique forme le sens primitif de l'argument, les opérations de l'analyse ont essentiellement affaire à sa détermination numérique, et on n'a pas besoin d'avoir toujours présente sa représentation première. La représentation de nombre se substitue à celle de longueur, comme son signe, de même que dans la pensée le mot nous épargne de faire renaître des représentations réelles, processus que j'ai décrit en détail dans l'article 18. Si nous pouvons suivant notre naturel nous passer plus ou moins de la représentation de quantité, et entendre par argument une succession de déterminations numériques, il n'en est pas moins vrai que la représentation géométrique fondamentale ne saurait être complètement mise de coté. Elle domine même le langage. Nous parlons d'une *certaine étendue*, sur laquelle sont distribuées les valeurs d'argument comme *points*; Nous partageons les étendues en étendues partielles; nous *construisons* sur les points de ces étendues des valeurs de fonction, etc.

Voilà pour la valeur d'argument isolée.

De même là où il s'agit de la représentation simultanée d'une multitude de valeurs d'argument isolées, les conceptions de l'Idéaliste et de l'Empiriste ne diffèrent pas essentiellement. Tous les deux se la représentent géométriquement comme une série de points isolés, aussi dense qu'on voudra, voire même indéfiniment dense; car la limite imposée par l'Empiriste à ce resserrement peut être reculée à volonté par l'affinement de la représentation. Une différence profonde au contraire règne entre leurs manières d'entendre l'ensemble de toutes les valeurs d'argument, qui sont possibles entre deux points, la *pantachie complète*, comme nous le nommerons tout-à-l'heure.

L'étude des groupements possibles des valeurs d'argument sur l'étendue d'argument, de leur resserrement croissant, enfin de l'ensemble de suites de valeurs et de ses rapports à des ensembles de points plus pauvres : voila les éléments essentiels de la théorie de l'argument à laquelle M. Cantor a incontestablement rendu de très grands services.

Mes travaux sur la théorie générale des fonctions, c'est-à-dire sur des problèmes concernant l'intégralité et le domaine de validité des formules de représentation, m'ont fait découvrir depuis longtemps des voies absolument analogues aux siennes. Pourtant je ne me suis occupé que de la distribution des points sur l'étendue d'argument et des méthodes d'exposition des nombres irrationnels, tandis que le concept de dénombrement joint à la théorie de la puissance relative des divers ensembles de points appartient en propre à M. Cantor. (*)

Je compte dans la suite de cet ouvrage revenir sur la théorie de l'argument et sur de nouvelles méthodes d'engendrer les irrationnelles dont il se compose,sans plus m'occuper de l'opposition des systèmes idéaliste et empiriste. Ici, après avoir développé le concept exact du partage de l'étendue d'argument, j'exposerai d'abord la théorie de la répartition des points telle qu'elle s'est présentée à moi, et avec mes propres expressions (art. 19, Sqq.) (**) et j'ajouterai la partie

(*) Sur une propriété de l'ensemble de toutes les valeurs algébriques réelles — Voir Borch, Journ. tom 77. — Contribution à la théorie des ensembles Borch, Journ. tom 84. — Acta Math., t. 2.

(**) Je m'estime d'autant plus fondé à présenter cette théorie telle qu'elle s'est offerte à moi d'elle-même, amenée par les besoins de la théorie des fonctions, que j'ai déjà publié ça et là quelques fragments isolés et que j'ai communiqué par lettre à M. Cantor la nécessité de la disposition générale de l'article 49, plus d'un an avant sa publication. (Leipz. Ann. XV) je considère comme ma propriété, avec la triple division qui en résulte, le concept général de pantachie des points et des étendues, qui n'est pas né de la spéculation, mais au contraire, s'adapte spécialement à la théorie des fonctions. et en résulte avec nécessité.

qui s'y rapporte — de la théorie du dénombrement et de la puissance relative des ensembles. Tout cela encore, sans me placer au point de vue essentiel de l'opposition des deux intuitions fondamentales. La dernière partie du chapitre a ensuite pour objet la séparation de la théorie en ses parties essentielles d'origine idéaliste et d'origine empiriste.

48. — Partage de l'étendue d'argument. — Qu'une valeur d'argument *particulière* signifie donc une longueur avec le point pour signe, ou bien un nombre, l'argument, considéré comme l'ensemble de toutes les valeurs qu'il représente, ne doit pas être identifié *sans restriction* à une longueur arbitraire. Entre étendue d'argument et longueur il y a une différence qui forme une partie essentielle du concept d'argument. Cette différence apparaît lors du partage de l'étendue d'argument.

Une valeur particulière x_1 peut partager les valeurs d'argument de l'intervalle (0,1) des trois manières suivantes :

$$0 \leqq x \leqq x_1 \text{ et } x_1 < x \leqq 1$$

$$0 \leqq x < x_1 \text{ et } x_1 \leqq x \leqq 1$$

$$0 \leqq x < x_1 \text{ et } x_1 < x \leqq 1$$

Ainsi donc, étant données deux formules dont l'une soit variable dans la première partie de l'intervalle (0,1), l'autre dans la deuxième, elles ne sont complètes que si l'on indique en outre auquel des trois cas elles s'appliquent et, dans le troisième cas, ce qui arrive pour le point isolé x_1.

Bien que ces trois cas du partage de l'argument s'accordent avec la conception habituelle d'un terme d'une limitation en tant qu'elles reviennent à l'inclusif et à l'exclusif ordinaire, ils cachent cependant une difficulté spéciale, qui se réduit bien finalement à une question de définition, mais qu'il est très utile d'avoir expressément aplanie. Cette difficulté prend naissance quand on considère ces trois modes de partage comme un procédé pour décomposer en parties l'étendue unité. Voici simplement ce qu'ils signifient : Des deux parties de l'étendue unité ou bien l'une ne possède pas de terme, du moins pas de terme représentable, palpable, ou bien, il en est de même de la deuxième partie, ou bien enfin aucune des deux n'a de terme, en ce sens que le point qui devait le former est retranché des deux parties. Cela ne répond pas à notre représentation habituelle de parties dans laquelle les parties nous apparaissent de même nature que le tout, et n'en diffèrent qu'en grandeur. Nous devons donc nous demander : Comment n'imagine-t-on pas plutôt l'étendue unité partagée en étendues ?

$0 \leqq x \leqq x_1$, $x_1 \leqq x \leqq 1$, au lieu de prendre des étendues avec une limite non représentable? Il faut répondre à cela que ce fait se produit dans un partage réel. Si on imagine les quantités linéaires réellement décomposées, on donne naissance à des parties de même nature que le tout, comme c'est leur caractère, et ces parties, au cas où l'étendue unité est l'objet partagé, seraient en effet délimitées d'après l'indication précédente.

Notre procédé de partage donné précédemment ne s'appliquait pas à la longueur en soi, mais à la longueur en tant qu'argument, à *l'étendue d'argument*. Nous identifions bien une valeur d'argument isolée avec une longueur, *mais une étendue d'argument désigne une suite de valeurs ordonnées suivant leur grandeur, de telle façon qu'une quantité numériquement déterminée ne puisse se présenter qu'une fois*, comme dans la série des nombres entiers chaque nombre ne se présente qu'une fois. C'est cet élément essentiel du concept d'argument qui fournit avec nécessité ces partages sans terme représentable. Le sens net et clair est donc le suivant :

Le symbole

$$0 \leqq x \leqq x_1 \,,\; x_1 < x \leqq 1$$

désigne à gauche toutes longueurs plus petites que x_1, portées sur l'étendue unité à partir de zéro, et, en outre, la longueur x_1 elle-même ; à droite, toutes les étendues supérieures à x_1, portées à partir de zéro. Le symbole :

$$0 \leqq x < x_1 \,,\; x_1 \leqq x \leqq 1$$

désigne à gauche toutes les étendues plus petites que x_1 ; à droite l'étendue x_1 et les étendues supérieures. Enfin

$$0 \leqq x < x_1 \,,\; x_1 \,,\; x_1 < x \leqq 1$$

désigne à gauche les étendues inférieures à x_1 ; au milieu, x_1 ; et à droite, les étendues supérieures à x_1.

Le mode d'intuition empiriste, suivant lequel les longueurs sont formées de points, fournit une image claire de ces sortes d'extrémités des suites de valeurs d'argument.

Si nous n'ajoutons aucune détermination particulière, on devra dans ce qui suit considérer une étendue ou un intervalle de l'argument comme impliquant les extrémités, et nous désignerons en général par (a, b)

$$a \leqq x \leqq b$$

49. — La première et la plus générale distinction entre les systèmes de points. — La répartition des points dans un intervalle — nous supposerons toujours l'intervalle (0, 1) — peut avant tout être de deux sortes :

D'abord la détermination à laquelle est soumise une espèce de points peut être telle que toute portion de l'intervalle si petite qu'elle soit, contienne des points de cette espèce. Nous nommons une telle distribution de points *pantachique*, de πανταχῇ, πανταχοῦ. Nous nommerons aussi pour abréger une distribution de points pantachiques — une *pantachie*.

D'autre part la répétition des points peut être de telle nature que dans aucune portion de l'intervalle, si petite qu'elle soit, elle ne soit *pantachique*. Cette distribution de points devra s'appeler *apantachique* ou une *apantachie*.

Ce sont là deux classes générales de distributions de points dont nous allons nous occuper sur le champ. Observons pourtant tout de suite qu'elles n'épuisent pas toutes les distributions de points possibles ; des répartitions de points peuvent n'être ni pantachiques ni apantachiques, et ne pas se laisser décomposer en un nombre fini d'étendues patanchiques et apantachiques (voir plus loin la note, art. 51).

Un exemple simple et particulièrement instructif de systèmes de points pantachiques est donné par les déterminations de points dyadiques ou décadiques. Choisissons, pour que l'exemple soit plus intuitif, les points dyadiques, dont la définition est :

$$Z = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{2^n}$$

où chacun des α peut être zéro ou un, et où n peut croître autant qu'on veut. Cette définition de Z est pantachique, parceque, étant donné un intervalle si petit qu'il soit n'importe où sur l'étendue unité, les α et les n peuvent toujours être déterminés de manière qu'un point Z tombe dans cet intervalle. Si on tire ensuite de la définition dyadique la suivante :

$$Z = lim_n = \infty \left(\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{2^n} \right)$$

où chacun des α peut-être zéro ou un, cette définition désigne alors l'ensemble de toutes les valeurs possibles entre zéro et un — puisque, (art. 46) — avec des suites de valeurs de la forme $\frac{\alpha_1}{2}, \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2}, \ldots$ on approche autant qu'on veut de toute valeur comprise entre zéro et un. Si on veut regarder cet ensemble de toutes les valeurs possibles comme un système de points sur l'étendue unité, il est alors naturellement pantachique κατ' ἐξοχὴν.

Quant aux systèmes apantachiques, on en trouvera plus loin de nombreux exemples. Nous allons dès maintenant discuter les deux espèces principales de systèmes, en commençant par les systèmes pantachiques.

50. — Répartition des systèmes de points pantachiques. — Les deux pantachies de l'article précédent qu'a fournies la définition dyadique établissent une distinction importante entre les systèmes de points pantachiques ou mieux entre les ensembles de valeurs pantachiques.

Soit donnée une définition Z qui fournisse un nombre fini aussi grand qu'on veut de points et suposons que ces points, quand on en augmente le nombre en disposant convenablement des quantités arbitraires de la définition, finissent par se présenter dans tout intervalle si petit qu'il soit. Je nommerai ce système de points une *pantachie illimitée*. L'ensemble limite des pantachies illimitées — c'est-à-dire l'ensemble de tous les points possibles, je le nommerai *pantachie complète*.

Entre ces deux classes extrêmes de systèmes pantachiques, il y a des pantachies sans nombre formant les classes intermédiaires, et auxquelles nous donnerons un nom, — parce qu'elles interviennent dans la suite de la théorie. Je désignerai d'un même nom toutes les pantachies qui ne sont pas illimitées, ce seront les *pantachies infinies*. La *pantachie complète* est également d'après cela une pantachie infinie. On en obtient encore, si on retranche de la pantachie complète les nombres rationnels, par exemple, ou les nombres dyadiques ou les nombres décadiques, ou n'importe quelles pantachies illimitées ou apantachies en nombre aussi grand qu'on voudra. De cette façon on obtient des pantachies qui ne sont pas simplement illimitées, parce que, comme on le verra à propos du concept de dénombrement, une pareille soustraction d'un nombre quelconque d'apantachies ou de pantachies illimitées ne réduira jamais la pantachie complète à l'état de pantachie illimitée. Qu'il existe encore des pantachies infinies d'une autre provenance, nous n'en savons rien jusqu'ici. L'expression: « pantachie infinie » est empruntée à l'intuition idéaliste. L'Empiriste pourra la tolérer comme un simple mot.

51. — Les systèmes de points apantachiques. — Passant aux systèmes apantachiques, puisons dans leur riche variétés les exemples les plus simples et les plus clairs.

Nous placerons en tête le *système de points isolés*, que nous nommerons aussi pour abréger *systèmes isolés*, entendant par là un système de points en nombre fini aussi dense qu'on veut, mais déterminé, de sorte qu'on ne peut pas comme pour les

restants dépend de la longueur de l'étendue qui exclut le point zéro. (*)

Il est clair qu'avec quelque imagination on peut trouver des combinaisons de ce genre en quantité. Je vais encore m'arrêter à l'une d'elles, parceque son principe de formation s'écarte du précédent et donne naissance à un système ne se laissant pas réduire à un système isolé par exclusion de points de convergence et possédant une propriété importante, qui m'a conduit à le construire.

Dans l'étendue (0, 1) je barre une étendue quelconque (α, β) qui ne contient aucun des deux points 0, 1. De l'étendue originaire (0, 1) deux parties restent libres : $(0, \alpha)$ et $(\beta, 1)$. Je procède avec celles-ci comme avec (0, 1). Je barre dans $(0, \alpha)$ une étendue (γ, δ) plus petite que $(0, \alpha)$ et qui laisse libre les extrémités 0, et α et, sous les mêmes conditions, je barre dans $(\beta, 1)$ l'étendue (ε, ζ). De l'étendue primitive il reste alors de libres les étendues : $(0, \gamma)$, (δ, α), (β, ε), $(\zeta, 1)$. Dans ces 4 étendues j'en barre 4 plus petites, et ainsi de suite indéfiniment. Les extrémités des étendues successivement barrées forment le système de points que j'ai en vue, et les étendues forment un système d'étendues différent de celui qui a été décrit plus haut.

Ce système a une propriété importante : Les étendues libres de points peuvent donner une somme égale à l'unité ou moindre que l'unité. En effet, $\overline{\alpha\beta} + (\overline{\gamma\delta} + \overline{\varepsilon\zeta}) + \ldots.$ peuvent avoir la limite 1, si, par exemple, $\alpha\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma\delta = \varepsilon\zeta = \frac{1}{8}$, etc. Dans d'autres cas, la limite est < 1. Il en résulte que, si on décrit de petites étendues autour des extrémités des étendues successives $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ et $\varepsilon\zeta$, etc., qui contiennent l'ensemble des points du système et forment une somme aussi petite qu'on veut, quand cette somme diminue la différence entre elle et l'étendue unité n'a pas nécessairement 1 pour limite, mais au contraire peut avoir pour limite une valeur quelconque < 1. Et cette circonstance est intéressante dans la théorie de l'intégrale.

En effet, en dehors des apantachies mentionnées, qui sont toutes des constructions servant à l'examen ou à la généralisation de théorèmes, ou bien construites pour elles-mêmes, l'analyse fournit directement des systèmes de points, qui

(**) Par la répartition des étendues nous pouvons mêler les systèmes de points de la manière la plus variée ; par exemple, pantachies avec apantachies en tant que les premières sont portées sur des étendues à des points de convergence.

conduisent à de certains résultats ; tel est particulièrement, celui que je nomme système de points intégrable. Ce système prend naissance, comme on va le voir, dans le concept de l'intégrale. Si une fonction subit des variations brusques qui tombent sur des pantachies de son argument, elle a une intégrale déterminée lorsque tous les sauts de ce genre, qui dépassent une quantité supposée aussi petite qu'on veut, forment un système intégrable. J'entrerai plus avant dans ces questions à propos de ma théorie de l'intégrabilité. La condition d'intégrabilité d'un système N s'énonce ainsi : Partageons l'intervalle $(0,1)$ en les étendues $\Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_n$. A chaque étendue Δ sauf une n'appartient qu'une de ses extrémités, une seule renferme deux extrémités. Désignons par $\Delta'_1, \Delta'_2, \ldots \Delta'_m$ celles des étendues Δ qui contiennent les points de N et posons $\Delta'_1 + \Delta'_2 + \ldots + \Delta'_m = D$. Diminuons les étendues Δ de telle manière que la plus grande d'entre elles n'ait pas de limite inférieure. Si alors une limite supérieure peut être assignée à cette étendue maximum, assez petite pour que D garde une limite supérieure fixée d'avance aussi petite qu'on veut, le système est intégrable. De cette définition résulte sans démonstration une proposition qui la complète, à savoir : Si le système N est intégrable pour une hypothèse particulière quelconque, compatible avec nos conditions, faite sur les Δ, il l'est pour toute autre hypothèse sur les Δ également compatible avec nos conditions.

Des indications que j'ai données dans mes descriptions précédentes de systèmes apantachiques relativement à la somme des étendues qui éliminent certains de leurs points, résulte que ce sont ordinairement des systèmes intégrables. Quand on étudie les systèmes à points de convergence d'ordre fini ou indéfiniment élevé, et qu'on les reconnaît tous intégrables, on peut soupçonner l'équivalence des deux concepts de système apantachique et de système intégrable, car les systèmes pantachiques sont toujours non intégrables. Le dernier système apantachique que j'ai décrit nous apprend maintenant que l'apantachie est le concept le plus vaste, car le système n'est intégrable que si $\alpha\beta + (\gamma\delta + \varepsilon\zeta) + \ldots = 1$, et il n'est pantachique dans aucun intervalle si petit qu'il soit. Il est encore à remarquer que le système ne possède pas de points isolés.

52. — Des propriétés générales des ensembles illimités. Le concept de dénombrement. – La théorie de l'argument a surtout pour objet des ensembles illimités de valeurs d'argument particulières, comme les nombres rationnels. Il paraît donc utile d'introduire dans cette multiplicité avec M. Cantor quelques concepts ordonnateurs, et permettant de mesurer

pour ainsi dire, des ensembles illimités,en les comparant à un ensemble particulier. J'ai en vue le concept du dénombrement d'un ensemble et celui de la puissance relative de deux ensembles.

Le concept de dénombrement d'une quantité illimitée d'objets est une extension de la méthode de numération. Le dénombrement d'une quantité finie d'objets consiste dans ce principe qu'on les range en une série en les faisant correspondre respectivement aux nombres 1, 2, 3, ... de la suite illimitée des nombres. Le nombre qui correspond au dernier objet de la suite est le nombre des objets. Etant donné une quantité illimitée d'objets ou d'éléments, si on les fait correspondre aux nombres 1, 2, 3... de telle façon qu'on ne puisse assigner parmi eux aucun élément qui ne corresponde à un nombre de la suite 1, 2, 3..., cette quantité d'éléments est dite dénombrable bien qu'elle soit illimitée et ne soit représentée par aucun nombre.

Naturellement toute série simplement illimitée de quantités a_1 , a_2 , a_3 ,... est dans ce sens dénombrable. Mais encore une suite double :

$$a_{mn} - m = 1, 2, 3, \ldots n = 1, 2, 3, \ldots$$

l'est également. On prend tout d'abord les éléments dans lesquels $m \leqq 10$, $n \leqq 10$, et on les fait correspondre à la suite des nombres entiers de 1 à 100. Puis on prend les éléments où $m \leqq 100$, $n \leqq 100$, on laisse de côté ceux qui ont déjà été pris, et on fait correspondre les autres à la suite des nombres de 101 à 10,000 etc. De même en général toute suite complexe :

$$a_{m_1 m_2 \ldots m_n} \quad m_p = 1, 2, 3, \ldots$$

est dénombrable. On commence par ordonner les 10^r éléments où les $m_p \leqq 10$, puis les $100^r - 10^r$ éléments où les m_p ne dépassent pas 100, sans répéter les premiers, etc.

Ces exemples expliquent le concept de dénombrement dans le sens général — Il ne s'agit ici que de coordination, car les éléments de l'ensemble peuvent avoir une signification arbitraire. Nous appliquerons encore le concept à une forme très générale de détermination d'analyse arithmétique, puis aux apantachies de l'article 51.

Qu'on imagine la détermination de nombres que voici :

$$Z = \varphi\ (m_0, m_1, \ldots m_n, n)$$

ou chacun des m_p de même que n peuvent être pris arbitrairement dans une suite limitée ou illimitée de nombres entiers, et où φ, pour des valeurs données aux m et aux n peut repré-

senter non seulement un nombre, mais, par exemple, une quantité de nombres dépendant de n. Ce symbole désigne bien des espèces de nombres. Il implique la suite de quantités complexes déjà considérée :

$$Z = a_{m_1 m_2 m_n}, \quad m_p = 1, 2, 3, \ldots$$

Puis il comprend les pantachies de tous les nombres rationnels :

$$Z = \frac{m_1}{m_2}$$

$$Z = m_0 + \cfrac{1}{m_1 + \cfrac{1}{m_2 + \ddots}},$$

où les nombres arabiques:

$$Z = m_0 + \frac{m_1}{\beta} + \frac{m_2}{\beta^2} + \ldots + \frac{m_n}{\beta^n}, \quad m_p = 0, 1, 2, \ldots \beta - 1,$$

Ilcomprend en outre principalement la pantachie de tous les nombres algébriques, quand Z représente les racines réelles de l'équation.

$$0 = m_n + m_{n-1} z + m_{n-2} z^2 + \ldots + m_0 z^n$$

et d'innombrables autres espèces de nombres.

Toutes ces espèces de nombres sont dénombrables. Qu'on range d'abord en une série tous les nombres

$$Z = \varphi(m_0, m_1, m_2, m_n, n)$$

dans lesquels la valeur positive d'aucun des nombres $m_0, m_1, \ldots m_n, n$, ne dépasse pas 10, puis, en exceptant ceux-ci, tous les nombres pour lesquels les modules de m_0, m_1, m_n, n, ne sont pas plus grands que 100, etc. On obtient ainsi une suite dans laquelle chaque nombre particulier de la forme Z n'intervient qu'une fois.

Evidemment tout ensemble illimité de points est dénombrable, si dans son accroissement il reste toujours fini. Nous avons deux images sous les yeux: la formule qui permet d'augmenter indéfiniment le nombre des points et l'ensemble des points lui-même parvenu à un état quelconque, mais toujours déterminé. A cet état, nous rangeons les points isolés en une suite quelconque et les faisons correspondre à la série 1, 2, 3... N. Maintenant, imaginons l'ensemble de points augmenté autant qu'on veut d'après sa formule. Faisons correspondre les nouveaux points à la suite $N + 1, \ldots N_1$ etc.

Un ensemble de points croissant de cette façon est donc sans doute dénombrable. Envisageons à cet égard les apantachies de l'article 51. Elles peuvent n'être dénombrables que

sileur accroissement fini n'est pas interrompu par la formation de limites de suites de points. Qu'il s'agisse, par exemple, *d'un point de convergence de deuxième ordre*, c'est-à-dire d'un point p, dont s'approchent indéfiniment des points p', lesquels eux-mêmes sont des points de convergence — mais de points isolés p''. On pourrait au point de vue idéaliste concevoir ainsi ces ensembles : On commencerait par faire entrer la suite *complète* des p'', qui converge vers un point p' — et on la répéterait successivement dans la suite complète des p'; des suites infinies seraient ajoutées les unes aux autres, et l'ensemble ainsi formé ne pourrait évidemment pas être disposé en série.

Toutefois cette conception d'ensemble de points n'est admissible que pour l'Idéaliste. Veut-on laisser de côté les limites de l'Idéaliste, la suite de points illimitée qui entoure le point de convergence de deuxième ordre peut-être définie de différentes manières. L'ensemble p'' qui est entre deux points p' a une grandeur illimitée, et de même l'ensemble p' qui converge vers p. On a ainsi dans les intervalles des points p' un nombre fini m de points p' et m nombres finis n de points p'', et on fait croître m et n indéfiniment. Ceci peut naturellement se produire de plusieurs manières. Les nombres m et n peuvent croître, par exemple, alternativement ou simultanément. Mais toujours cet accroissement pourra être dirigé de telle manière que de l'ensemble de points, considéré géométriquement, aucun ne soit oublié, mais qu'au contraire la suite de points croissant avec m et n finisse par contenir chacun des points du système de points de convergence du deuxième ordre, et ce système devient alors dénombrable.

C'est ainsi que sont construits tous les ensembles à définition géométrique de l'article précédent. Il est inutile de le montrer ici ; bien plus la possibilité pour eux d'être dénombrés est évidemment liée à leur origine géométrique, puisque la suite croissante n'est jamais interrompue par un passage à la limite. Si on se demande quelle est, pour l'Idéaliste, la limite de ces apantachies, on trouve une analogie remarquable avec le « *continuum des nombres* » expression de M. Cantor) ou la pantachie complète considérée comme limite des pantachies illimitées. Car de même que le continuum des nombres renferme toujours des valeurs pantachiques qui ne se trouvent pas (voir l'article suivant) dans les pantachies illimitées, dont il est conçu comme la limite dans un cas donné — et cela parceque les pantachies illimitées sont dénombrables — de même les limites idéalistes de quelques apantachies géométriques de l'article précédent renferment des points qui n'appartiennent pas à l'apantachie illimitée. Par exemple, l'ensemble de points qui se resserre près d'un point de convergence de premier

ordre ne renferme pas ce point. L'ensemble caractérisé par un point de convergence de deuxième ordre ne contient ni les points p' ni le point p.

D'ailleurs, cette circonstance n'a pas d'influence sur la possibilité du dénombrement. Car on n'a pas besoin d'ajouter ces points limites à l'apantachie illimitée. Si pourtant on le fait, comme ils sont eux-mêmes dénombrables, il est facile de les faire entrer dans l'apantachie de telle manière qu'elle reste dénombrables.

53. — **De la puissance relative des ensembles.** — Le concept de puissance relative des ensembles est étroitement lié à celui du dénombrement.

Définition. — Si deux ensembles finis ou non finis M et N peuvent sans ambiguité et complètement se correspondre l'un à l'autre, élément à élément, ils ont une puissance égale.

Par portion d'un ensemble M, on devra comprendre tout autre ensemble M' dont les éléments sont aussi des éléments de M. Si deux ensembles M et N ne sont pas d'égale puissance, ou bien M et une portion de N, ou bien N et une portion de M auront même puissance. Dans le premier cas, nous dirons que la puissance de M est plus petite, dans le second cas, plus grande que celle de N (*).

La puissance plus grande ou plus petite peut encore se définir ainsi : La correspondance de M à N élément à élément est-elle impossible, et quand on fait correspondre n'importe comment les éléments de M à ceux de N reste-t-il, par exemple, dans l'ensemble N, des éléments tels qu'il n'y correspond aucun élément de M, la puissance de M est alors dite plus petite que celle de N. D'après cela deux ensembles finis ne sont d'égale puissance que si le nombre des points est le même. Des ensembles finis sont de puissance moindre que des ensembles dénombrables infinis. Des ensembles dénombrables infinis sont entre eux d'égale puissance.

La plus importante proposition sur ce sujet s'énonce ainsi : *Des ensembles dénombrables sont toujours de puissance moindre que le Continuum des nombres* ou *la pantachie complète.* (**) Je veux donner à cette proposition, en vue de questions à étudier plus tard, le sens suivant :

(*) Borch-Journ, tome 84, p. 242 G. Cantor, et Acta Mathematica tome 2, Une contribution à la théorie des ensembles.

(**) G. Cantor sur une propriété de l'ensemble de toutes les valeurs algébriques réelles — Borch. Journ. tome 77, page 260 — et sur les ensembles infinis linéaires — Leipz. Ann. 15, p. 5 — Voir également Acta Mathématica, tom. 2.

L'ensemble de toutes les valeurs possibles ne peut se mettre sous la forme d'une série simple ; mais toute série de valeurs détermine elle-même dans tout intervalle, quel qu'il soit (a, b) des valeurs qui ne lui appartiennent pas. M. Cantor montre cela de la manière suivante : Supposons la suite de quantités dénombrables ordonnée en une série ω_1 ,ω_2 ... et considérons une étendue d'argument (a, b). Soient maintenant a_1 et b_1 , où $a_1 < b_1$, les premières quantités de la suite des ω qui tombent à *l'intérieur* de l'intervalle (a, b). Envisageons à présent l'intervalle (a_1 b_1), et désignons par (a_2 , b_2), $a_2 < b^2$ b_2 , les deux premiers nombres de la suite des ω, qui tombent dans l'intervalle (a_1 b_1) etc. On donne ainsi naissance à deux séries fournies par la suite des ω : a_1 a_2 ,....et b_1 b_2 ...

On a $a_1 < a_2 < \ldots$ et $b_1 > b_2 > \ldots$

Des intervalles (a, b), (a_1 b_1) ..., chacun renferme tous ceux qui suivent.

La série des intervalles (a, b), (a_1 ,b_1)... ou bien finit par s'arrêter, ou bien est illimitée. Dans le premier cas qui se présente en général dans les systèmes de points apantachiques une seule valeur ω peut encore tomber dans le dernier intervalle,et toutes les autres valeurs de ce dernier intervalle sont étrangères à la série ω, d'après le choix qui a été prescrit des groupes de valeurs successives a_p , b_p. Si la série des intervalles n'est pas limitée, les séries a_1, a_2, ... et b_1, b_2, ... sont illimitées, et les a_p aussi bien que les b_p possèdent des valeurs limites $a\infty$ et $b\infty$,... puisque ce sont des séries de quantités seulement croissantes ou seulement décroissantes et ne dépassant pas des limites déterminées, puisque les a restent inférieurs aux b, et les b_p supérieurs aux a. Il peut maintenant arriver d'abord que $a\infty < b\infty$, alors aucune valeur de l'intervalle ($a\infty$, $b\infty$) n'appartient à la série des ω. On peut en second lieu avoir $a\infty = b\infty$, comme cela a lieu dans toutes les pantachies. Alors cette limite commune $a\infty = b\infty$, qui n'est jamais atteinte, n'appartient également pas à la série des ω.

Après avoir étudié la puissance des ensembles dénombrables par rapport à la pantachie complète et avoir établi que la première est plus petite, il nous reste parmi les ensembles mentionnés à considérer les pantachies infinies.

J'ai déjà remarqué que jusqu'ici les pantachies infinies que nous connaissons, — à l'exception de la pantachie complète, tirent leur origine de celle-ci par élimination de pantachies illimitées ou d'apantachies, dans tous les cas d'ensembles dénombrables. Des ensembles dénombrables en aussi grand nombre qu'on voudra forment par leur réunion un ensemble

également dénombrable ; si donc, on supprime de la pantachie complète des ensembles dénombrables le reste ne peut être dénombrable, sans quoi la pantachie complète devait être tout d'abord dénombrable. Les pantachies infinies formées par une semblable élimination ne sont donc pas dénombrables.

Mais il y a plus encore : M. Cantor démontre qu'elles ont la même puissance que le continuum des nombres (*). Nous avons donc en réalité jusqu'ici deux ensembles à l'un desquels tout ensemble de nous connu est égal en puissance : la série des nombres entiers positifs et le « *contiuum des nombres*. » M. Cantor estime comme très vraisemblable qu'il n'y a en général que deux puissances. Les considérations des articles suivants contiennent maints indices, difficiles à expliquer avec rigueur, de ce fait que dans les ensembles de quantités linéaires, mais seulement dans celles-là, les choses se passent ainsi. La conclusion suivant laquelle la puissance de la pantachie complète n'est pas diminuée par la suppression d'une suite dénombrable est applicable à toute pantachie supérieure à la suite dénombrable. Il faudrait donc encore montrer que si une pantachie n'est pas amoindrie par la suppression en question, elle a même puissance que la pantachie complète.

Nous avons exposé cette théorie suivant le mode de raisonnement habituel aux mathématiques, sans la critique des intuitions fondamentales ; cependant, il intervient souvent dans ces notions des limites nouvelles de nature spéciale ; par exemple, les limites de suites de points qui se resserrent non seulement comme auparavant près d'un seul point, mais encore dans toutes leurs étendues, de sorte qu'il importe de nouveau d'envisager séparément l'intuition idéaliste et l'intuition empiriste.

54. — Critique de la Théorie de l'Argument par l'Idéaliste et l'Empiriste. — *Le concept empiriste des ensembles ou suites de points de grandeur illimitée et le concept d'ensembles dénombrables sont évidemment absolument identiques.*

Que tout ensemble qui s'accroît suivant une règle quelconque mais qui est envisagé comme fini à tout instant de son développement est dénombrable, c'est ce que nous avons montré, plus haut. Mais en outre que toute suite dénombrable, si elle n'est pas une suite finie déterminée, forme un ensemble de

(*) Cela résulte directement de la démonstration 556. Borch Journ Tome 84 p. 254.

grandeur illimitée, cela va de soi. Car, si on le fait correspondre à la série des nombres entiers, c'est, sous cette forme, un ensemble illimité. Avec une autre disposition il peut n'être considéré comme dénombrable qu'en tant que cette disposition peut fournir, sans perte d'éléments, une série ordonnée suivant des indices entiers.

Les ensembles dénombrables et, en particulier, les pantachies illimitées sont au sens empiriste des représentations et appartiennent à bon droit à la mathématique empiriste. Il s'agit de savoir jusqu'où nous parvenons ainsi avec l'Empiriste, quand ne renonçant jamais à l'acte de la représention, nous cherchons à approcher le plus que nous pouvons de la limite de ces représentations.

Dans la voie tracée par cette question la pantachie complète, comme limite d'une pantachie illimitée, sera l'objet propre de notre étude. Considérons cependant tout d'abord un cas plus simple de formation de limite ; par exemple, une apantachie caractérisée par un point de convergence de premier ordre.

Qu'il s'agisse simplement de la suite de points

$$\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{7}{16}, \ldots\ldots \text{ où } \frac{2^{n-1}-1}{2^n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}$$

et supposons que le point $\frac{1}{2}$ n'appartienne pas à cet ensemble. On pourra concevoir cette détermination de points aussi bien à la manière idéaliste qu'empiriste. Pour l'Idéaliste elle comprend à la fois tous les points qu'elle définit ; les distances des points finissent par devenir infiniment petites. L'Empiriste s'imagine les points existant seulement jusqu'à un $n^{ième}$, et il prend le nombre n aussi grand qu'il veut suivant son besoin.

Or il importe de rechercher si l'ensemble idéaliste est une limite réelle de l'ensemble empiriste, c'est-à-dire si l'ensemble empiriste tend vers l'idéaliste de façon à s'approprier finalement tout point qui lui appartient ; c'est précisément ici le cas, puisque nous avons exclu le point $\frac{1}{2}$ de l'ensemble. Nous pouvons appliquer les mêmes considérations à toutes les apantachies de l'art 51. Toutes, à l'exception du système de points isolés, apparaissent, quand on les examine de près, comme des ensembles illimités dans le sens empiriste, ayant une limite idéale réellement existante lorsque d'ailleurs (art. 52.) les points de convergence eux-mêmes ou bien sont exclus de l'ensemble, ou bien sont comptés d'une manière spéciale.

Ces suites de points permettent ainsi une exposition neutre ; on n'a pas besoin de prendre parti pour la conception idéaliste

ou empiriste. Les raisonnements que l'on applique à de pareils ensembles restent indépendants de l'opposition des deux modes d'intuition. Les choses se passent ici comme en géométrie où il importe peu aux résultats des recherches que l'on prenne pour fondement l'exact idéal ou l'exact illimité, qu'on regarde la ligne droite comme *infiniment* mince ou comme engendrée de la façon déjà décrite (art. 34). Du moins jusqu'à maintenant il ne s'est pas présenté une obscurité ou un paradoxe qui pût se ramener à l'opposition des deux modes d'intuition.

Après avoir établi que les apantachies illimitées ont des limites idéalistes, nous allons soumettre à un examen semblable la limite des *pantachies* illimitées, c'est-à-dire voir comment l'Idéaliste et l'Empiriste doivent saisir la pantachie complète.

Nous pouvons de nouveau donner pour fondement à la pantachie complète le symbole analytique

$$Z = lim \left(\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{4} + \dots + \frac{\alpha_n}{2^n}\right), \ \alpha_p = 0 \text{ ou } 1$$

Il désigne l'ensemble de toutes les quantités correspondant à des valeurs 0 ou 1 données aux α d'une manière quelconque, qui sont définies par la série finie ou sans fin.

$$\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{4} + \dots.$$

Laissons de côté les suites éternellement sans loi comme une fiction de l'Idéaliste déjà suffisamment considérée. Alors au point de vue analytique la pantachie complète doit être envisagée comme l'ensemble de toutes les lois de succession possible des symboles 0, 1, mis à la place des α dans la suite α_1, α_2, α_3, ... L'Idéaliste admettra cet ensemble comme existant réellement, toute loi encore imaginable existant de toute éternité, indépendante d'êtres pensants. L'Empiriste y voit des lois déjà connues, et un cadre pour toutes celles qui sont encore à trouver. Cependant, reportons-nous à l'image géométrique de la pantachie, où à chacune des suites particulières des α_1, α_2 .... correspond un point particulier.

L'Idéaliste arrive ainsi au but tout naturellement. Il range toutes les valeurs Z comme points idéaux sur la ligne droite idéale, et entre les points isolés se trouve les étendues infiniment petites de tous ordres.

Il renonce à se faire une image de cette suite de points ; il ne cherchera donc pas à s'en représenter le mode de formation. La pantachie complète est pour lui la limite réellement exis-

tante de la pantachie illimitée, dans ce sens que les valeurs particulières en nombre infini de cette limite existent en même temps, absolument comme un nombre fini de quantités. Il attribue donc au concept « $lim \left(\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{4} + \ldots + \frac{\alpha_n}{2^n}\right)$ pour toutes les combinaisons des « », la même raison d'être qu'à la limite de la fraction décimale sans fin. Il le range parmi les êtres existants auxquels la logique lui ordonne de croire.

La pensée ne suit pas ici un processus logique nouveau. S'étant posé (art. 22) cette question fondamentale « combien existe-t-il d'étendues moindres qu'une étendue donnée, et combien y en a t-il de possibles, c'est-à-dire ne devant qu'au hasard de ne pas exister ? » — il a répondu que le nombre en est infini ; eh bien il a ainsi saisi et exprimé exactement le sens indiqué ci-dessus de la pantachie complète. Les étendues partielles plus petites sont équivalentes à toutes les valeurs d'argument possibles, et, par conséquent, l'image que l'Idéaliste se fait ici de l'argument ne s'éloigne en aucun trait de la première, née d'une autre suite d'idées.

Voyons maintenant comment l'Empiriste doit se représenter les choses. Avant tout, il doit rejeter la pantachie complète comme l'ensemble de toutes les quantités possibles existant à la fois. Car cet ensemble ne peut être fini, et il ne peut être non plus seulement d'une grandeur illimitée, puisqu'il contient déjà toutes les valeurs particulières possibles ; il est donc infini, et, par suite, non représentable, sans existence pour l'Empiriste. Il pourrait donc n'être qu'une limite non représentable, mais de quoi ?

L'Empiriste se représente sur l'étendue unité des points sans nombre, il les multiplie par la pensée autant qu'il veut et en resserre l'ensemble de plus en plus. Il peut s'arrêter quelque temps à cette représentation, ou se composer tout de suite son étendue d'argument comme suite de points qu'il imagine ici plus fins, là plus grossiers, — il ne pourra jamais, en affinant sa représentation, changer l'essence de cette image. L'ensemble de points quoique aussi dense qu'on voudra reste un ensemble fini. L'Empiriste ne peut se représenter autre chose. Or, jusque là, il n'y a rien de surprenant dans l'apparition des deux modes d'intuition.

Il semble plutôt que nous ne fassions que répéter la distinction première entre la limite et le premier degré vers la limite, entre l'exact à volonté et l'exact idéal, distinctions que nous venons d'établir plus haut dans les apantachies illimitées. Mais, si on y regarde de plus près, on voit qu'il y a du nouveau.

L'Empiriste ne peut imaginer la pantachie complète que dans le devenir, c'est-à-dire que comme ensemble de points qui augmente et s'approche indéfiniment de la pantachie complète, et alors il se demande *si et comment on peut imaginer une suite de points* croissante, *dont la limite est la pantachie complète*, c'est-à-dire *une pantachie qui en croissant finit par renfermer toute valeur.* — Voici la réponse :

Il n'y a pas d'ensemble de points croissant où par exemple dans une suite finie initiale viennent peu à peu s'introduire de nouveaux points en vertu d'une règle quelle qu'elle soit, et qui s'approche de la pantachie complète de manière que toute valeur particulière finisse par s'y montrer.

La preuve en est déjà faite. L'ensemble toujours fini qui croît est dénombrable; mais il fournit donc dans tout intervalle, si petit qu'il soit, des valeurs qui ne lui appartiennent pas. (Art. 53). Ces valeurs formant une pantachie sont donc étrangères à l'image empiriste d'un ensemble quelconque de points recouvrant l'argument.

Aussi ces nouvelles valeurs ne sont pas non plus de même nature que les points de convergence de certaines apantachies dont il a été question plus haut, qui n'appartenaient pas non plus d'eux-mêmes à l'image empiriste, mais qui pouvaient y être introduits. Elles forment bien plutôt la grande majorité, puisque, comme on l'a vu, la pantachie complète par l'exclusion d'ensembles dénombrables n'est pas plus pauvre en valeurs isolées.

Il résulte de là que :

La pantachie complète de l'Idéaliste ou le continuum des nombres n'est une limite réelle d'aucune suite empiriste de représentations.

Pour l'Empiriste le continuum des nombres n'existe donc pas, ni comme limite, ni comme terme final d'une approximation ; il n'existe absolument pas pour lui. Ceci est vrai non seulement pour l'état actuel de la science, mais pour toujours.

A l'argument l'Empiriste joint donc la représentation suivante :

I. — Sur l'étendue unité, à chaque valeur particulière

$$Z = \frac{\alpha^1}{2} + \frac{\alpha_2}{4} + \ldots$$

correspond un point qu'on imaginera avec une exactitude aussi grande qu'on voudra.

II. — Il n'existe pas de suite de points variable qui, en s'augmentant, s'approcherait indéfiniment de la suite de tous les points possibles. A la pantachie complète l'Empiriste joint

seulement la représentation que sa fantaisie, quand elle veut imaginer l'étendue d'argument couverte de points formant une suite de plus en plus dense, ne rencontre pas de limite,

55. — Remarques dernières sur l'argument de l'Idéaliste et de l'Empiriste, et sur la détermination du mode d'exposition neutre. — Si l'opposition établie dans l'article précédent entre les conceptions idéaliste et empiriste de l'argument exerçait une influence sur les méthodes et sur les résultats de l'analyse, il ne resterait plus alors qu'à opter pour l'une des deux et qu'à établir suivant ce choix les fondements de son analyse. Mais, par bonheur, il n'en est pas ainsi. Nulle part, excepté naturellement dans la théorie des pantachies idéalistes elles-mêmes, l'analyse ne suppose plus que l'Empiriste ne donne comme représentable. Les systèmes de points qui sont utilisés sont des apantachies ou des pantachies illimitées. Si, par exemple, il s'agit d'une fonction, qui est un pour les valeurs rationnelles, zéro pour les valeurs irrationnelles de l'argument, les valeurs rationnelles forment alors une pantachie illimitée et parmi les irrationnelles on peut également imaginer des multitudes innombrables de pantachies illimitées. Car personne ne peut attacher à une telle fonction aucune autre représentation. Quand on dit ensuite: un point supposé mobile parcourt toutes les valeurs entre les points a et b, cette façon de parler est encore admissible au sens empiriste, si elle ne dit pas autre chose que ceci : sur l'étendue (a, b) on ne peut imaginer aucun point avec lequel le point mobile, c'est-à-dire le point laissé indéterminé, ne puisse coïncider, et, en analyse, cela suffit dans tous les cas. A ces deux représentations peuvent se ramener toujours les phénomènes analytiques,

Ici, l'Idéaliste pourrait d'ailleurs avoir envie de recommencer la lutte avec l'Empiriste. Il pourrait lui objecter que par son renoncement à ce qui n'est pas représentable il ne laisse aux combinaisons de la pensée qu'un domaine mesquin et même insuffisant. Comment voudrait-il suffire à la mécanique, par exemple, la trajectoire fixe devant contenir à la fois tous les points que parcourt le mobile, le concept de trajectoire devant donc contenir le continuum des nombres de l'Idéaliste ? — A quoi l'Empiriste pourrait répliquer ainsi : Il ne conteste pas que sa critique des premières hypothèses n'ait pour conséquence une limitation très marquée du domaine de la pensée, il ne nie nulle part l'existence du non représentable. Mais tout simplement ce n'est pas pour lui un objet de spéculation mathématique. Il est certain que la continuité est quelque chose existant quelque part et plein de mystère. Un point mobile sur une trajectoire déterminée se trouve à chaque instant à

un endroit de la trajectoire ; il désigne dans chacune de ses positions une valeur d'argument déterminée, et il passe au moins une fois par toute valeur d'argument comprise entre les extrémités du chemin qu'il parcourt. C'est tout ce qu'on peut dire, et cela suffit en mécanique. La continuité n'étant pas compréhensible, la mécanique analytique décompose en réalité la trajectoire en éléments, c'est-à-dire qu'en vue du calcul elle la recouvre d'une pantachie illimitée de points. Qu'on imagine ensuite le point mobile parcourant successivement les étendues qui séparent deux points consécutifs de la pantachie, et qu'on multiplie celles-ci indéfiniment, jamais il n'en sortira une pantachie complète. Qu'on passe enfin aux limites, ce qui fait apparaître les quotients différentiels, dans l'intégration qui suivra, s'il s'agit réellement d'une intégration, et non pas de l'établissement d'une fonction primitive, une pantachie illimitée de valeurs d'argument sera de nouveau prise pour fondement, et la valeur limite de la somme, que nous nommons intégrale, n'aura absolument rien affaire avec la pantachie complète ; elle est, elle, une limite réelle. La pantachie complète ne joue de rôle que dans sa propre théorie,... Voilà ce que dirait l'Empiriste.

Comment du point de vue neutre envisagerons-nous la pantachie complète, l'ensemble des quantités mathématiques linéaires ?

Elle est certainement, de quelque manière qu'on la considère, quelque chose d'essentiellement distinct d'un ensemble de points illimité, c'est-à-dire d'un ensemble de valeurs isolées se resserrant aussi rapidement qu'on veut.

$$\text{L'expression : } Z = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{4} + \ldots \alpha_p = o, \text{ ou } 1,$$

contient, si les α ne sont pas tous nuls à partir d'un certain rang, l'ensemble des lois, suivant lesquelles une suite illimitée des α peut être déterminée. Mais l'ensemble de pareilles lois et celui des fonctions d'une variable apparaissent, quand on approfondit ces questions abstraites, comme des concepts d'égal contour. Et on ne peut se faire absolument aucune représentation de l'ensemble de toutes les fonctions possibles.

Nous n'apporterons pas de restriction à cette nature si vaste de la pantachie complète, et la question sera de savoir comment nous devrons comprendre l'argument, pour ne tomber sous la critique ni de l'Idéaliste, ni de l'Empiriste.

Si le continuum des nombres était une limite de représentations réelles, comme un triangle idéal est la limite de représentations que l'Empiriste rend aussi exactes qu'il veut, on pourrait laisser de côté ces différences dans l'exposé neutre de

l'analyse, sauf à s'en souvenir, comme on le fait à propos des expressions quantité, valeur, longueur, etc. (art, 41), quand on parlerait du continuum des nombres. L'un y verrait la limite idéale, l'autre un degré vers la limite. Seulement le fait que le continuum des nombres n'est pas une limite réelle ne laisse à l'exposé neutre d'autre choix que d'y renoncer et de se rattacher à la conception empiriste. L'Idéaliste ne peut alors nous adresser, comme il a déjà fait à l'Empiriste, que le reproche de limiter inutilement à ses yeux le champ de la science. Maintenant, quoique nous donnions à la suite de notre exposé la conception empiriste pour fondement, remarquons bien que nous n'avons pas choisi entre les deux modes de conception et que nous ne nous sommes décidément pas arrêté à la conception empiriste. Il s'agit ici seulement *d'un mode d'exposition* qui ne choque la manière de voir ni de l'Idéaliste ni de l'Empiriste.

Comme la pantachie complète, les pantachies infinies sont aussi de nature idéaliste et le concept de la correspondance élément à élément ne l'est pas moins en tant qu'il se rapporte à de pareils ensembles. C'est un transfert idéal de la coordination, susceptible de dénombrement et de représentation, à l'ensemble de toutes les valeurs possibles. Sans doute, les fonctions d'une variable données pour chaque valeur de l'argument sont des correspondances de valeurs de fonction aux valeurs d'argument de la pantachie complète. Mais ces formules sont toujours de telle nature qu'elles sont valables ou bien pour toutes valeurs d'argument, ou bien, comme on verra dans le chapître suivant, pour l'ensemble de ces valeurs à l'exception de pantachies dénombrables, auxquelles s'appliquent d'autres déterminations. Par là, les correspondances fonctionnelles tombent sous la conception empiriste. La correspondance abstraite de valeur à valeur dans des pantachies infinies est purement idéaliste.

Le fait qu'aucun ensemble de points supposé croissant n'approche du continuum des nombres de l'Idéaliste, que les deux ensembles sont de nature tout-à-fait hétérogène, puisque le premier est représentable tandis que le second est en dehors de toutes représentations, a son côté intéressant. En effet, quand, à propos de pantachies complètes ou infinies de l'Idéaliste, on fait des considérations quelconques, on en tire des conclusions empruntées à l'image d'une suite de points aussi resserrée qu'on veut, on court le risque de tomber dans des paradoxes. Car la pantachie illimitée n'étant nullement une approximation de la pantachie complète, il n'est pas permis sans autre raison de conclure des propriétés de la première aux mêmes propriétés de la deuxième.

Par exemple, M. Cantor est conduit par l'analogie avec les séries simples, doubles, etc. — qui sont également dénombrables à l'aide de la suite des nombres entiers — à certains théorèmes sur les ensembles continus des nombres, et il trouve entre autres que le continuum de points sur une ligne a une puissance égale au continuum de points sur un plan. Cette conclusion un peu embarrassante a paru paradoxale ; elle a semblé répugner à ce qu'on appelle le sens commun. Le fait est que c'est tout simplement la conclusion d'un raisonnement où interviennent des fictions idéalistes, auxquelles on fait jouer le rôle de véritables quantités, quoiqu'elles ne soient pas même des limites de représentations de quantités. Voilà où réside le paradoxe. On a vu comment la conception idéaliste conduit avec nécessité au concept de l'infiniment petit, qui du moins était une véritable limite, — on ne peut donc pas s'étonner de ce que le raisonnement sur le continuum de nombres, qui n'est pas une limite, conduise à des résultats plus singuliers encore, qui d'ailleurs restent, ainsi que l'infiniment petit et ses propriétés, dans le domaine de la conception idéaliste. Les principes que nous avons exposés dans ce livre acquièrent donc une certaine utilité pratique en mettant à jour la source de paradoxes qui se cache dans des concepts très répandus, — de même qu'ils servent, comme on le verra, à rendre plus clair et plus précis le concept de la fonction.

Des quantités ou nombres croissants, on peut dire ou bien qu'ils ont une limite ou bien, au sens idéaliste, qu'ils deviennent infinis. Une suite de points croissante n'a pas de limite, au sens ordinaire ; il faudrait donc faire correspondre le continuum des nombres à l'infini. Or, il a effectivement avec lui une propriété commune. De même que l'infini ne devient pas fini. si on en retranche le fini, de même le continuum des nombres n'est pas plus pauvre en valeurs individuelles, ne diminue pas en puissance, quand on en retire des pantachies illimitées. Il semble d'ailleurs que ce soit là l'unique analogie que présentent les deux limites de représentations de l'Idéaliste.

Un rôle est échu à la théorie des pantachies dans les sciences physiques.

Ce n'est pas dans le concept d'atome même qu'une différence essentielle se fait valoir entre les intuitions idéaliste et empiriste. C'est plutôt dans la manière dont, en mécanique, les éléments d'action, les molécules agissant à distance, sont supposés distribués dans l'espace. L'Empiriste qui ne peut prendre pour base qu'un nombre fini suffisamment grand n'ira pas loin avec ses théories corpusculaires. Il ne peut évidemment parvenir qu'à la synthèse de la classe de phénomènes d'où est abstraite l'idée de la molécule agissant à distance,

c'est-à-dire de phénomènes mécaniques. Pour la synthèse d'autres classes de phénomènes, par exemple dans le domaine de la chimie, il aura peut-être besoin d'autre chose que de l'action à distance. Et maintenant encore les phénomènes organiques ont sans doute leur abstraction dernière spéciale.

L'Empiriste ne prendra donc pour hypothèse l'abstration de la molécule agissant à distance comme utile à l'exposé des phénomènes que dans la mécanique ordinaire. L'Idéaliste au contraire, quand l'exige sa conception du monde, possède dans la pantachie complète un concept qui doit avoir à ses yeux un contenu infiniment plus riche que les pantachies illimitées de l'Empiriste.

Théoriquement, en liant la représentation de molécules disséminées dans l'espace à la pantachie complète de l'Idéaliste, on pourrait réussir, par exemple, à déduire la pression — s'il était possible de faire entrer dans le concept physique de la pantachie complète d'atomes un contenu répondant à notre besoin d'exactitude.

Le développement de ce chapitre et une partie du suivant montrent combien il est nécessaire dans maints domaines analytiques de voir nettement si pour l'exposé neutre on met au jour une mathématique acceptable ou purement idéaliste. Ce n'est qu'ainsi qu'il nous est possible de distinguer ce qui appartient au domaine réel de représentations de ce qui lui est emprunté sans l'image d'un mot et se trouve impliqué dans le processus logique se poursuivant au-delà du réel.

Je donne à la fin de ce chapitre une vue générale sur les ensembles de points dont il a été question.

56. — Vue générale sur les ensembles de points.

I. Pantachies

A. Pantachie complète.

L'Empiriste entend par là l'ensemble de toutes les quantités *imaginables* déterminées par une définition géométrique ou numérique, ou encore à déterminer. — L'idéaliste y voit le Continu des nombres ou des quantités sur l'étendue unité, c'est-à-dire l'ensemble de toutes les quantités possibles existant à la fois.

B. Pantachie illimitée.

C'est une détermination de nombres telle que dans tout intervalle, si petit qu'il soit, se trouvent des points y répondant. Cet ensemble de points est toujours fini et peut être supposé aussi grand qu'on veut.

C. Pantachie infinie.

On entend par là toute pantachie qui n'est pas comprise dans B. Ainsi en particulier la pantachie complète A appartient à cette catégorie.

II. Apantachies.

A. Apantachie limitée.

Points isolés en nombre déterminé.

B. Apantachies illimitées. Par exemple :

1° *Système à points de Convergence*, c'est-à-dire points isolés qui convergent indéfiniment vers des points particuliers et donnent naissance à des points de convergence d'ordre fini et d'ordre indéfiniment élevé.

2° *Inscription d'étendues successives*, dont les extrémités forment un système apantachique, mais sans points isolés.

III. Systèmes de points tels que l'étendue sur laquelle ils se trouvent ne puisse être décomposée en un nombre fini d'étendues partielles où ils forment des pantachies ou des apantachies.

En dehors de cette distinction entre les ensembles de points, on peut en imaginer une infinité. Nous citerons en première ligne, à cause de leurs nombreuses applications :

1° *Les ensembles dénombrables.* Ce sont tous ceux qui ont été mentionnés ci-dessus, excepté les pantachies I, A et C.

2° *Les systèmes de points intégrables.* Les apantachies II seules sont intégrables, mais toutes ne le sont pas. Sont intégrables, outre les apantachies limitées, toutes celles indiquées dans II, B, 1°, c'est-à-dire les points isolés avec points de convergence. De II, B, 2°, une petite partie seulement est intégrable. Les systèmes III ne le sont jamais.

CHAPITRE IV

La Fonction

57. — Notions premières. — Nous poursuivons maintenant le concept de fonctions au-delà du point où l'ont laissé l'Idéaliste et l'Empiriste. Mais nous ferons intervenir sans nouvelle explication, quand cela paraîtra utile, la distinction des fonctions en anorthoïdes et orthoïdes, — distinction qui a évidemment un caractère neutre.

Nous l'avons suffisamment indiqué : par fonction de la variable ou de l'argument il faut entendre une détermination à l'aide de laquelle aux valeurs de l'argument correspondent des valeurs de la fonction ; et nous devons encore montrer tout ce qu'implique cette expression : valeur de fonction. A une valeur d'argument particulière on peut faire correspondre comme valeur de fonction une valeur particulière, ou bien un nombre limité ou illimité de valeurs, ou bien tout un intervalle de valeurs, ou bien une série d'intervalles de ce genre. Bref on peut y faire correspondre un quelconque des ensembles de points mentionnés dans l'article 51, ou des ensembles d'étendues qui leur étaient liés. On figure depuis Descartes les fonctions en menant des lignes droites perpendiculaires à l'étendue d'argument aux points qui marquent les valeurs d'argument, et en portant sur ces lignes les valeurs de fonction positives d'un côté, négatives de l'autre côté de l'étendue d'argument. Mais ce n'est pas seulement dans la manière dont on fait correspondre les valeurs de fonction qu'il nous faut insister sur l'absence de restrictions ; les valeurs d'argument qui font prendre à la fonction une certaine détermination peuvent être aussi choisies en pleine liberté. Le concept général de fonction, tel qu'il ressort de l'analyse nouvelle, n'exige pas, par exemple, que la fonction soit donnée pour toute valeur d'argument ; bien plus, elle peut n'être donnée, quand cela suffit à notre but, que pour un seul des systèmes de points de l'art. 56. Eh bien, pour conserver la généralité la plus grande, nous pouvons imaginer une loi, d'après laquelle dans des

étendues d'argument fixées par elle on peut choisir arbitrairement un point et y placer la valeur de fonction, absolument comme nous avons fait correspondre à la valeur d'argument unique des intervalles entiers pour valeurs de fonction.

A l'égard des *valeurs de fonction* qui correspondent aux diverses valeurs de l'argument, on aura à distinguer suivant leur nombre et leur nature les dépendances simples, multiples, etc., — et celles qui sont indéterminées entre des limites données.

A l'égard des *valeurs d'argument* que revendique la fonction, on aura à distinguer les fonctions données *complètement*, (c'est-à-dire pour la pantachie complète des valeurs d'argument), de celles qui sont données *incomplètement*, (c'est-à-dire, par exemple, pour une pantachie ou une apantachie quelconque).

Pour éclaircir davantage le concept de fonction, bornons-nous simplement à la pantachie complète des valeurs d'argument $0 \leqq x \leqq 1$.

L'Idéaliste se trouve ici en face d'une question analogue à celle des fractions décimales éternellement sans loi. Il imagine une ordonnée construite sur chaque valeur particulière du continu des nombres. Sur cette ordonnée se trouve un continu de nombres exactement comme sur l'étendue d'argument, et l'Idéaliste obtient l'ensemble de toutes les fonctions en portant sur toutes les valeurs d'argument toutes les combinaisons de valeurs d'ordonnée. Dans cette marche rien n'exige l'existence d'une loi. A la conception de l'Idéaliste répond l'ensemble infini de toutes les valeurs de fonctions particulières imaginables que peut donner le hasard, et par là il atteint à l'abstraction extrême d'une fonction absolument sans loi.

L'Empiriste au contraire, pour qui il n'y a pas de continu des nombres, peut imaginer des points innombrables pourvus de valeurs arbitraires ; il peut faire correspondre indéfiniment des valeurs de fonction à des pantachies et apantachies sans nombre d'après une loi arbitraire ; il aura toujours à pourvoir de valeurs le reste de la pantachie complète. qu'une pareille détermination n'aura pas rendue plus pauvre en points.

Cette pantachie infinie qui reste forme toujours l'arrière-fond, dont l'Empiriste n'approche jamais malgré l'hypothèse que tous les points d'argument accessibles à sa fantaisie sont pourvus de valeurs. Pour déterminer complètement la fonction, il est obligé d'avoir recours à *une formule générale* qui fasse correspondre la fonction à une pantachie infinie de l'argument. Pour l'Empiriste c'est là une nécessité.

Voici donc où est conduit l'Empiriste : Pour obtenir une fonction complètement déterminée, des points isolés pris arbi-

trairement peuvent être pourvus de valeurs arbitraires ; à des apantachies et à des pantachies illimitées prises arbitrairement on peut faire correspondre comme bon semblera des valeurs de fonction : à côté de ces déterminations, il faut qu'on donne une formule générale, d'après laquelle l'ensemble des valeurs d'argument de la pantachie infinie qui reste encore doit être pourvu de valeurs de fonction.

C'est là pour l'Empiriste le concept le plus général d'une fonction donnée complètement, que nous n'avons pas le droit de dépasser dans notre exposé neutre, parce que nous devons laisser de côté, comme pure fiction idéaliste, les fonctions complètement dépourvues de loi. (*)

D'après cela, il faudrait distinguer avant tout deux catégories de fonction : celles où une loi généralement valable lie la fonction et l'argument, et celles où certaines espèces dénombrables de points sont exceptées de la formule générale et doivent être pourvues d'autres valeurs que celles que prescrivait la loi générale.

On peut à peine considérer cela comme une restriction, si on renonce à l'image idéaliste de la fonction, ou mieux à son équivalent geométrique (art. 39). Ce que la critique de l'Empiriste en laisse subsister est encore, à y regarder de près, d'une si étonnante généralité qu'une pareille base peut, comme elle le doit d'ailleurs, nous suffire pleinement pour le développement du concept de fonction. Dans ce chapitre nous ne ferons plus que quelques réflexions sur le concept général de fonction. Il s'agira exclusivement de la façon dont se comporte une valeur de fonction particulière à l'égard des valeurs voisines, et des éléments du concept de continuité qui se rattache directement à cette question.

Si plus tard, nous reprenons cette étude générale, le procédé naturel et logique consistera à restreindre peu à peu ce

---

(*) La remarque, incontestablement exacte pour l'Idéaliste (art. 39), à savoir qu'une fonction donnée pour la pantachie complète à l'exception de pantachies illimitées, et donnée en particulier, mais avec une autre détermination, pour ces pantachies illimitées — ne doit pas être considérée comme complètement donnée, — que bien plus une loi commune doit nécessairement déterminer toutes les valeurs de fonction, — ne doit pas être prise en considération dans notre exposé neutre ; l'abîme entre illimité et infini ou l'étendue nuageuse (art. 36) est une fiction idéaliste que l'Empiriste n'accepterait pas sans la discuter. Je remarque d'ailleurs que dans beaucoup de cas cette objection de l'Idéaliste peut perdre sa force même aux yeux de l'Idéaliste. Nous en trouvons un exemple dans la fonction II_b (art. 58), avec son interprétation (art. 59), où je montrerai comment la loi s'appliquant à la pantachie illimitée peut être étendue à la pantachie complète.

concept général dans la direction des fonctions dites analytiques ; en quoi le principe de classification sera fourni par les concepts d'intégrale, de quotient différentiel, mais principalement par les diverses conditions de possibilité de représentation des fonctions à l'aide de formules de représentation. Une classification de plus en plus rigoureuse et parfaite des fonctions peut-être considérée non seulement comme l'étoile qui guidera nos recherches, mais aussi comme le but asymptotique de l'analyse.

Le but des recherches qui s'y rapportent serait d'après cela une classification systématique des fonctions, absolument comme la science de la nature s'efforce d'en établir une pour les êtres vivants, nécessaire par elle-même et parfaitement conforme aux phénomènes. Je me complais dans cette comparaison : Il existe certainement une analogie d'une part entre les formes végétales et animales les plus simples, la faible liaison des parties, etc., et le concept le plus général de fonction, celui de fonction anorthoïde (art. 37,8), et d'autre part entre les formes plus élevées d'animaux et les fonctions de la théorie complexe des fonctions. Il suffit d'une parcelle de plan pour déterminer ces fonctions dans tout le plan, comme un os suffisait à Cuvier pour reconstruire l'espèce. Entre les deux classifications on remarque pourtant, au moins pour le moment, une différence formelle. La classification des êtres vivants établit des classes essentiellement coordonnées, quoiqu'ici ce soit un principe de subordination qui préside, comme il doit le faire, à la répartition. Mais les classes successives de la théorie générale des fonctions ne sont jusqu'ici que subordonnées, car toute classe nouvelle, étant née de la limitation d'un concept de fonction plus général, doit appartenir à toutes les précédentes. Cela n'est pourtant que le premier germe de la théorie future. Comme la théorie des fonctions analytiques, qui comprend maintenant déjà diverses classes de fonctions coordonnées, — la théorie générale des fonctions ressemblera de plus en plus, grâce aux recherches futures, à la classification des sciences naturelles.

58. — **Quelques exemples de fonctions.** — Je commence par donner quelques exemples simples de fonctions pour rendre plus claires les distinctions que nous allons établir. Les nombres rationnels s'offrent comme pantachie illimitée qu'il faut pourvoir de déterminations particulières de fonction. J'utiliserai les propriétés suivantes :

Je donne au nombre rationnel la forme $\frac{Z}{N}$, où Z est pre-

mier avec N. N sera pris de la forme $p_1^{\rho} p_2^{\rho_2} \ldots p_r^{\rho_r}$ où les p désignent des nombres premiers, et les ρ des nombres entiers.

1° On peut autour de chaque point limiter un intervalle assez petit pour qu'il ne renferme, à l'exception de ce point, que des nombres rationnels à dénominateur plus grand qu'un nombre N_1 choisi aussi grand qu'on aura voulu.

Car tous les nombres rationnels à dénominateur $\geqq N_1$ forment un système de points isolés, et dans tout intervalle, si petit qu'il soit, il y a des nombres rationnels.

2° Etant donné un intervalle Δ et une série de nombres premiers $p_1, p_2, \ldots p_r$, où $p_1 \leqq 2$, l'intervalle Δ renferme toujours des nombres rationnels de la forme $\dfrac{Z}{p_1^{\rho_1} p_2^{\rho} \ldots p_r^{\rho_r}}$.

Cela est évident.

J'indiquerai maintenant les fonctions suivantes.

Fonctions anorthoïdes

Ia. — $f(x) = 3x$ pour les valeurs :

$$x = 0{,}3\,;\ 0{,}33\,;\ 0{,}333\,;\ \text{etc.}$$

$$\text{et } f(x) = o \text{ pour } x = \tfrac{1}{3}$$

b. — $f(n) = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, où les u sont des quantités quelconques. Cette fonction n'a de sens que pour les valeurs entières de l'argument.

IIa. — $f(x) = 1$ pour les valeurs rationnelles de x,
$f(x) = 0$ pour les valeurs irrationnelles de x.

b. — $f(x)$ prend pour $x = \dfrac{Z}{p_1^{\rho_1} p_2^{\rho_2} \ldots p_r^{\rho_r}}$ les valeurs, $\dfrac{1}{p_1 p_2 \ldots p_r}$,

et $f(x) = o$ pour toutes les autres valeurs de x.

c. — $f(x)$ prend pour $x = \dfrac{Z}{p_1^{\rho_1} p_2^{\rho_2} \ldots p_r^{\rho_2}}$ les valeurs $\dfrac{Z}{p_1^{\rho_1} p_2^{\rho_2} \ldots p_r^{\rho_r}}$

et $f(x) = o$ pour les autres valeurs de x.

Fonctions orthoïdes

III. $f(x) = \frac{1}{x}$, $\sin\frac{1}{x}$, $x \sin\frac{1}{x}$, $\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}$, $\frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$.

IV. $f(x) = \lim_{h=\infty} \frac{1 + hx}{1 + hx^2}$, $f(x) = arc\ tg hx$.

V. Outre ces fonctions anorthoïdes et orthoïdes particulières, je citerai encore le groupe de fonctions

$$\sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{\cos m_p\ x}{\mu^p},$$

qui, suivant l'acrcoissement relatif de p, m_p, μ_p, représente toute une échelle d'orthoïdies et d'anorthoïdies (Art. 63).

Les fonctions I sont des exemples de fonctions non complètement données. Il va de soi que nous pouvons compléter ces fonctions, suivant nos besoins, en pourvoyant aux valeurs d'argument auxquelles ne répondait rien.

59. — **Valeurs de fonctions directes et indirectes.** — Etudions maintenant ce qu'il faut entendre au sens le plus général par valeur de fonction.

On dira que $f(x)$ est simplement la valeur de fonction que la formule de la fonction fait correspondre à x. Cela est rigoureux; seulement à ces valeurs de fonction *directes* peuvent e'en ajouter d'autres qu'on est fondé à considérer comme valeurs de $f(x)$ non pas seulement par ce que les applications y conduisent, mais parce qu'on les juge telles d'un point de vue purement abstrait. Elles apparaissent quand on forme la valeur directe $f(x)$ pour un point $x_1 \gtrless x$, qu'ensuite on intercale une suite de valeurs x_2 x_3 ,... entre x_1 et x, qui s'approchent indéfiniment de x, et qu'on cherche la limite de la série $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$.... On arrive ainsi par une voie indirecte à des valeurs $f(x)$, qui peuvent différer de celles qu'on obtient directement. Nous les nommerons valeurs de fonction *indirectes*.

Une fonction rationnelle et entière de x ne possède pas de ces valeurs distinctes des directes. Sin x, e^x, et les fonctions de ce genre n'en ont pas davantage. Considérons au contraire la première fonction I de l'article précédent. Pour $x = \frac{1}{3}$ sa valeur directe est zéro, mais la limite de $f(0,3)$, $f(0,33)$, etc., est 1.

On désignera une valeur de fonction indirecte correspondant à x par $lim_{\varepsilon=0} f(x+\varepsilon)$. On devra, bien entendu, ajouter par quelle série de valeurs positives ou négatives on fait varier ε. Complétons, par exemple, la fonction I en faisant correspondre zéro à toutes les valeurs d'argument qui sont libres. 1 reste la limite de la suite $f(0,3)$, $f(0,33)$,... ; pourtant, quoique les valeurs d'argument $\frac{1}{2.3}, \frac{3}{4.3}, \frac{7}{8.3}$,.... tendent vers $\frac{1}{3}$, zéro est la limite de $f\left(\frac{1}{2.3}\right)$, $f\left(\frac{3}{4.3}\right)$,....

Dirichlet (1) a recours pour $lim_{\varepsilon=0} f(x+\varepsilon)$ à une notation abrégée dont nous ferons souvent usage. Il écrit

$$f(x+o) \text{ et } f(x-o).$$

$f(x+o)$ désigne les valeurs indirectes pour une suite de valeurs positives de ε. Il doit être indiqué en outre, si c'est nécessaire, quelle est cette série de valeurs que prend ε. Si on ne le fait pas, $f(x+o)$ pourra désigner l'ensemble de toutes les valeurs positives indirectes. — De même pour $f(x-o)$.

Dans toutes les fonctions II, III, IV, se présentent des valeurs indirectes distinctes des directes.

Dans la fonction II_a, qui est 1 ou zéro selon que l'argument est rationnel ou irrationnel, à toute valeur de l'argument répondent à la fois les valeurs indirectes zéro ou 1.

Pour la fonction II_b, les valeurs directes sont zéro ou $\frac{1}{p_1 p_2 \ldots p_r}$ suivant que l'argument est rationnel ou irrationnel et de dénominateur $p_1^{\rho_1} p_2^{\rho_2} \cdots p_r^{\rho_r}$. Aux yeux de l'Idéaliste, soit dit en passant, cette dernière détermination peut comprendre les valeurs irrationnelles ; il suffit de concevoir les irrationnelles comme des fractions dont le dénominateur contient des facteurs premiers en nombre infini ou infiniment grands. Une irrationnelle peut encore naître, p restant fini, de l'accroissement des ρ. Les valeurs indirectes existent pour toute valeur de l'argument en nombre illimité. Pour toute valeur de l'argument on a les suivantes :

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ldots \frac{1}{2.3}, \frac{1}{2.5}, \ldots \frac{1}{2.3.5}, \ldots$$

parce que dans un petit intervalle renfermant une valeur d'argument il se présente des nombres de la forme

$$\frac{Z}{2^\rho}, \frac{Z}{3^\rho}, \frac{Z}{2^{\rho_1} 3^{\rho_2}}, \ldots$$

(1) Repertorium der Physik Von Dove und Moser, tome I, p. 170.

Quant à la fonction II c, ses valeurs indirectes sont toutes zéro, parce qu'on peut limiter autour de chaque valeur d'argument un intervalle où n'apparaisse aucun nombre rationnel de dénominateur $p_1^{\rho_1} p_2^{\rho_2} \cdots p_r^{\rho_r}$ inférieur à un nombre choisi aussi grand qu'on a voulu.

Absence des valeurs de fonction pour certaines valeurs d'argument. — Il n'est pas rare de voir les valeurs de fonction directes faire défaut pour des valeurs d'argument particulières. Les fonctions III en fournissent des exemples. Car, puisque pour $x = o$, $\frac{1}{x}$ est dépourvu de sens, toutes les fonctions III pour $x = 0$ cessent d'être données. Il en va de même de $x \sin \frac{1}{x}$, car $\sin \frac{1}{0}$ ne représentant aucune quantité, on ne peut dire que $0 \sin \frac{1}{0}$ soit égal à zéro.

$f(x) = \frac{1}{x}$ a les valeurs indirectes $f(0 + 0) = +\infty$; $f(0 - 0) = -\infty$; c'est-à-dire que x tendant vers zéro cette fonction croît ou décroît indéfiniment.

$f(x) = \sin \frac{1}{x}$ a comme valeurs indirectes les valeurs indéterminées entre -1 et $+1$.

$f(x) = \frac{1}{e^x}$ a les valeurs indirectes $f(0 + 0) = +\infty$, $f(0 - 0) = 0$.

En général, la non existence des valeurs de fonction se présente toutes les fois que pour une valeur d'argument la fonction est infinie, comme on dit souvent, car nos opérations analytiques sur les quantités pouvant fournir un accroissement indéfini, mais non point l'infini de l'Idéaliste, il faut, quand une fonction semble devenir infinie en un point, que l'illusion se traduise dans quelque symbole dépourvu de sens comme $\frac{1}{x}$ pour $x = 0$.

Lorsque les valeurs directes, comme dans les exemples précédents, n'existent pas, rien ne nous empêche de les rétablir conformément à notre but. Ainsi la fonction $x \sin \frac{1}{x}$ devient une fonction complètement donnée, dès que j'ajoute la condition que pour $x = 0$ elle soit nulle.

Valeurs limites indirectes. — Une troisième espèce de valeurs de fonction joue encore un rôle en analyse et doit tout au moins être mentionnée ici. Elles se présentent dans les fonctions définies comme résultats d'un passage à la limite. Les fonctions IV en sont des exemples.

Considérons la fonction $f(x) = lim_{h=\infty} \frac{1+hx}{1+hx^2}$. On obtient la fonction définie comme limite, ici et dans tous les cas analogues, où on n'a pris aucune disposition, en donnant *d'abord* à x une certaine valeur d'argument déterminée, et en faisant *ensuite* h infini. On trouve ainsi les valeurs directes $f(x) = lim_{h=\infty} \frac{1+hx}{1+hx} = \frac{1}{x}$, pour $x \lessgtr o$, et 1 pour $x = o$. Les valeurs indirectes pour $x = o$ sont $+\infty$ et $-\infty$.

On obtient les valeurs limites indirectes pour un argument x, en mettant à la place des x dans l'expression qui suit le signe *lim* une valeur d'argument différente de x, savoir $x + \varepsilon$, et faisant ensuite en même temps h infini et ε nul, ces deux variables devant être alors liées par une relation. De $\frac{1+h(x+\varepsilon)}{1+h(x+\varepsilon)^2}$ on tire, pour $x = o$, $\frac{1+h\varepsilon}{1+h\varepsilon^2}$.

La relation entre ε et h sera, par exemple, $\varepsilon h = \gamma$. L'expression précédente devient

$$\frac{1+\gamma}{1+\frac{\gamma^2}{h}},$$

dont la limite pour $h = \infty$ est $1 + \gamma$, c'est-à-dire, puisque γ est arbitraire, une valeur quelconque. Les valeurs limites indirectes remplissent ainsi la distance entre les deux valeurs de fonctions extrêmes qui ici sont indirectes. Il en est de même des autres fonctions IV. La fonction $lim_{h=\infty}$ *arctg hx* a, pour $x = o$, la valeur directe zéro et les valeurs indirectes $+\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$. Ses valeurs limites indirectes remplissent, comme on le voit aisément, l'intervalle des valeurs de fontions indirectes $\pm\frac{\pi}{2}$. Seulement il faut aussi bien remarquer que les valeurs limites indirectes peuvent sortir de l'intervalle limité par les valeurs de fonction directes ou indirectes.

60. — Du saut des fonctions. — La plus grande différence entre les valeurs d'une fontion directes ou indirectes, pour une valeur d'argument particulière, est d'un intérêt spécial. Nous nommons *saut* cette plus grande différence. Par exemple, π est le saut de $lim_{h=\infty}$ *arctg hx* pour $x = o$.

La fonction II_a, qui est 1 pour les arguments rationnels et zéro pour les autres, a pour tout argument une valeur de saut égale à 1.

Dans la fonction II_b, qui pour tout argument de la forme $\frac{Z}{p_1^{\rho_1} p_2^{\rho_2} \ldots p_r^{\rho_r}}$ prend la valeur $\frac{1}{p_1 p_2 \ldots p_r}$, et pour tout autre est nulle, le saut est $\frac{1}{2}$ pour tout valeur de l'argument.

Dans la fonction II_c, qui pour $x = \frac{Z}{p_1^{\rho_1} p_2^{\rho_2} \ldots p_r^{\rho_r}}$ acquiert la valeur $\frac{1}{p_1^{\rho_1} p_2^{\rho_2} \ldots p_r^{\rho_r}}$ et est nulle dans les autres cas, le saut est pour ces valeurs de x égal à $\frac{1}{p_1^{\rho_1} p_2^{\rho_2} \ldots p_r^{\rho_r}}$ et, pour x irrationnelle, il est zéro.

Dans ces fonctions de construction extrêmement simple, le concept du saut n'offre aucune difficulté. Mais on peut dans des fonctions plus compliquées voir de moins près le sens précis de ce qu'il faut entendre par valeurs indirectes extrêmes. Dans la plupart des applications, il suffit d'une quantité telle que le saut de la fonction peut en être considéré comme la limite, à savoir *l'oscillation de la fonction*, c'est-à-dire la plus grande différence des valeurs de fonction dans un intervalle suffisamment petit entourant un point. Cette différence maximum est aussi en général une limite de différences de valeurs de fonction dont nous établirons plus loin l'existence. Elle est une limite, car les fonctions ne prennent pas ordinairement les plus petites valeurs qu'elles ne dépassent pas, ni les plus grandes auxquelles elles ne deviennent pas inférieures. Les fonctions de l'article 58 en sont des exemples. Ainsi la fonction Ia ne prend jamais sa plus grande valeur 1.

C'est de cette limite des différences des valeurs de fonction que le saut est lui-même la limite, obtenue comme il suit. Considérons une valeur d'argument x et formons l'intervalle

$$(x - \delta, x + \delta)$$

Soit, dans cette intervalle, g_o la petite valeur que la fonction ne dépasse pas, g_u la plus grande au-dessous de laquelle elle ne descende pas, et dont nous démontrerons plus tard l'existence. Quand δ diminue, g_o ne peut pas augmenter, g_u ne peut pas diminuer, et tous deux ont donc, en vertu de la proposition II du chapitre suivant, des limites déterminées G_o et G_u, — si, pour plus de simplicité, nous admettons que les valeurs de fonction qui interviennent dans le calcul sont comprises entre

des limites finies. La quantité $G_o - G_u$ est le saut de la fonction au point x. Il ne reste plus qu'à montrer que lorsqu'on prend pour base l'intervalle $(x - \delta_1, x + \delta_2)$, où δ_1 et δ_2 deviennent nuls en restant l'un à l'égard de l'autre dans un rapport quelconque, on obtient la même limite $G_o - G_u$. Supposons $\delta_1 > \delta_2$, et introduisons de nouvelles notations. Soient les intervalles

$$(x - \delta_1, x + \delta_1) = \Delta_{11}$$
$$(x - \delta_1, x + \delta_2) = \Delta_{12}$$
$$(x - \delta_2 \; x + \delta_2) = \Delta_{22}$$

Je désignerai par $g^{(pq)}$ les valeurs g de l'intervalle Δ_{pq}. Δ_{22} est contenu dans Δ_{12}, Δ_{12} dans Δ_{11} : On a donc

$$g_o^{(11)} \geqq g_o^{(12)} \geqq g_o^{(22)}$$
$$g_u^{(11)} \leqq g_u^{(12)} \leqq g_u^{(22)}$$

La limite de $g_o^{(12)}$ ne peut donc être autre que G_o, celle de $g_u^{(12)}$ que G_u. Il faut encore remarquer qu'on peut distinguer aussi des valeurs de saut unilatérales correspondant à la limite de g_o et de g_u dans un intervalle $(x - \delta, x)$ ou $(x, x + \delta)$. On désignera enfin à la manière de Dirichlet ces valeurs de saut comme répondant à l'argument $x - 0$ ou à l'argument $x + 0$.

61. — De la continuité des fonctions en un point particulier de l'argument. — Une fonction est dite *continue* pour une valeur particulière d'argument x, si pour cette valeur le saut est nul. Le point est alors un *point de continuité* de la fonction. Elle est dite *discontinue* en un point, si en ce point le saut n'est pas nul. Quand la fonction croît au-delà de toutes limites dans le voisinage d'un point x, ou qu'elle devient infinie au sens idéaliste au point même, elle est également *discontinue* ; en un pareil point en effet, il ne saurait exister de valeur de saut puisque g_o ni g_u ne peuvent être déterminés. Le saut, ne pouvant être évalué, n'est pas nul.

Nous devrons ici encore distinguer une continuité unilatérale. La fonction $f(x)$ sera, par exemple, continue pour un point $x - 0$, si la valeur de saut pour $x - 0$ est nulle.

Si nous parlons non pas de la valeur de saut de la fonction, mais de sa différence maximum de valeurs dans une étendue, différence dont le saut est la limite, nous énoncerons ainsi la condition de continuité :

La fonction $f(x)$ est continue au point x, s'il est toujours possible de limiter autour de ce point un intervalle assez petit pour qu'il ne s'y trouve aucune différence des valeurs de fonc-

tion $f(x)$ supérieure à une quantité prise aussi petite qu'on aura voulu. Ce qui veut dire, en langage analytique : Soient ε et ε_1 deux quantités de signes quelconques. La continuité de $f(x)$ au point x fait qu'il y a toujours aux valeurs absolues de ε et ε_2 une limite supérieure assez petite pour que la valeur absolue de la différence

$$f(x+\varepsilon) - f(x+\varepsilon_1)$$

reste au-dessous d'une quantité prise aussi petite qu'on aura voulu.

La condition habituelle, qui sert pratiquement à établir la continuité, s'énonce un peu autrement. Il n'y est question que d'une quantité ε, et elle exige qu'on puisse donner à la valeur absolue de ε une limite supérieure assez petite pour que, abstraction faite du signe, $f(x) - f(x+\varepsilon)$ reste au-dessous d'une quantité choisie aussi petite qu'on aura voulu. Les deux énoncés reviennent évidemment au même, car dans la première expression qu'on peut mettre sous la formé

$$[f(x+\varepsilon) - f(x)] - [f(x+\varepsilon_1) - f(x)]$$

chacune des deux parties doit tomber au-dessous de toute limite, et la deuxième expression résulte de la première quand on fait ε ou ε_1 nul.

Si on prend pour la condition de continuité l'expression

$$f(x) - f(x+\varepsilon),$$

on voit immédiatement que si la valeur $f(x)$ n'existe pas, le point x n'est pas un point de continuité. Il ne pourra le devenir que si, pour la valeur de fonction qui manque, on fixe à volonté une valeur propre. Ainsi la fonction $x \sin \frac{1}{x}$ au point $x = o$ ne peut être regardée comme continue que lorsqu'il est posé qu'elle est nulle pour $x = o$.

Pour ce qui est des fonctions de l'art 58, il ne saurait être question de continuité à propos des fonctions I non complètement données.

Des fonctions II, II a ni II b ne sont continues pour aucun point. La fonction Ic est continue pour tous les points irrationnels, discontinue pour les points rationnels.

Les fonctions III et IV sont toutes — et celles du groupe V sont en partie — discontinues au point $x = o$.

62. — De la continuité des fonctions dans un intervalle. — Si une fonction est continue sur une étendue, non seulement la valeur du saut est nulle en chacun des points, mais encore cette fonction se fait remarquer à propos des plus grandes différences de fonction qu'elle présente dans un intervalle de cette étendue de continuité.

Nous avons vu plus haut qu'une fonction peut ne pas prendre réellement la limite supérieure de ses valeurs dans un intervalle (Fonct. I a de l'art. 58). Encore nous faudra-t-il démontrer l'existence d'une pareille limite supérieure. Je vais m'appuyer ici sur une proposition qui sera démontrée plus loin (Art. 64, III), à savoir que une fonction *continue dans un intervalle* y possède réellement des valeurs *maxima* et *minima*, et non pas seulement des limites supérieure et inférieure. D'après cela, l'oscillation ou la plus grande différence de valeurs dans un intervalle de la fonction continue est la différence de deux valeurs que prend réellement la fonction dans cet intervalle. Soit (x_1, x_2) l'intervalle, $f(x)$ la fonction. Son oscillation dans l'intervalle (x_1, x_2) a donc la forme $f(x'') - f(x')$, abstraction faite du signe,

$$x_1 \leqq x' < x'' \leqq x_2.$$

Si une fonction est continue en chaque point d'un intervalle, ses rapports aux valeurs voisines sont par là établis en chaque point et, par conséquent, de point en point, pour tout l'intervalle. Pour exprimer de pareils rapports, bornons la fonction continue à l'intervalle (0, 1); mais imaginons que la fonction se prolonge dans la direction $x > 1$, pour la valeur $f(1)$, et dans la direction $x < o$, pour la valeur $f(o)$, afin de pouvoir traiter aussi les extrémités de l'intervalle (0, 1) comme des points intérieurs. Puis introduisons certains intervalles Δ.

Les intervalles Δ. — Soit M la plus grande différence de valeurs de $f(x)$ dans l'intervalle (0, 1) et μ une quantité $< M$. En outre, soit Δ l'intervalle maximum qu'un point x partage en deux parties égales, — (et que nous regarderons comme correspondant à ce point) — où l'oscillation atteigne la valeur μ. Je remarque expressément que les intervalles Δ ne sont pas liés à l'intervalle (0, 1). Au contraire, à cause de la précaution prise au sujet de la continuation de $f(x)$, ils peuvent dépasser les limites 0 et 1; et, pour les points voisins de ces limites, cela aura toujours lieu. x et μ déterminent évidemment Δ, et voici ce que l'on peut dire de ces quantités.

— Supposons d'abord x fixe.

Δ diminue et augmente en même temps que μ. Si μ augmente, Δ peut ne pas croître d'une manière continue comme le montrent des figures faciles à construire; mais il doit croître sans interruption. Car si on supposait que μ variant de μ_1 à μ_2, Δ restât constant, mais qu'il possédât pour $\mu < \mu_1$ une plus petite valeur Δ', qui pour $\mu = \mu_1$ deviendrait égale à Δ une différence de valeurs $\mu_2 - \mu_1$ de la fonction $f(x)$ devrait nécessairement tomber dans la différence des intervalles Δ et Δ'. Celle-ci se compose de deux intervalles qui ont zéro pour limite quand

Δ' tend vers Δ. Peu importe comment la différence $\mu_2 - \mu_1$ se distribuera dans ces intervalles, elle s'y conserve, et, si on rend les intervalles de plus en plus petits, il y correspond au moins une discontinuité de $f(x)$. Ainsi donc :

Si on imagine que μ croisse ou décroisse d'une manière continue, Δ augmente ou diminue en même temps, sans prendre la même valeur pour deux valeurs de μ. Mais Δ peut varier par sauts brusques.

En outre : *Lorsque $f(x)$ n'est pas constante autour de la valeur considérée de x, Δ et μ tombent en même temps au-dessous de toute limite.*

En effet, si Δ reste supérieur à une limite Δ_1, pendant que μ devient aussi petit qu'on veut, il ne peut y avoir à l'intérieur de Δ_1 aucune différence fonctionnelle. Mais si la valeur de x considérée est située dans un intervalle où la fonction soit constante, Δ ne peut tomber au-dessous du double ne la distance qui sépare x de l'extrémité la plus voisine de l'intervalle constant.

Nous avons considéré Δ comme fonction de μ et nous posons $\Delta = \varphi(x, \mu)$ puisque Δ dépend aussi évidemment de x. De ce que nous savons sur la relation qui lie Δ à μ nous pouvons déduire ce qui suit pour la fonction inverse $\mu = \rho(x, \Delta)$. Faisons décroître Δ d'une manière continue, là où Δ, fonction de μ, passe brusquement d'une valeur Δ_1 à une valeur différente Δ_2, — μ restera simplement constant, Δ variant d'une manière continue de Δ_1 à Δ_2.

Ainsi donc : *Pour tout valeur de x autour de laquelle $f(x)$ n'est pas constante, la fonction $\mu = \rho(x, \Delta)$ tombe avec Δ au-dessous de toute limite sans jamais croître. Elle peut toutefois rester invariable pour des étendues de l'argument. Pour des points x autour desquels $f(x)$ est constante, μ fonction de Δ, atteint le zéro plus vite que Δ et reste alors nulle, pendant que Δ diminue encore.*

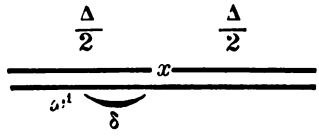
Je remarque enfin que pour les considérations qui suivent on pourrait aussi utiliser l'intervalle *minimum* où l'oscillation de la fonction atteint la valeur μ, tout comme aussi dans les deux cas, les demi-intervalles $(x - \Delta, x)$, $(x, x + \Delta)$. Bornons-nous cependant pour le moment à nos déterminations de tout à l'heure.

Etude de la fonction $\Delta = \varphi(x, \mu)$, x étant la variable. — Supposons maintenant μ constant et étudions Δ comme fonction de x. Ici se place tout d'abord une proposition que nous devons à M. Luroth (*) :

(*) Math. Ann. VI. 319. —

Δ est continu par rapport à x ; il a donc une valeur minima Δ_0 et prend cette valeur pour une certaine valeur de x, x_0,

Prenons dans l'intervalle $\left(x-\frac{\Delta}{2}, x+\frac{\Delta}{2}\right)$ ou Δ



un point x_1 dont la distance à x soit δ. On a alors :

$$\tfrac{1}{2}\varphi(x_1, \mu) \geqq \tfrac{1}{2}\varphi(x, \mu) - \delta.$$

car jusqu'à $\frac{1}{2}\varphi(x, \mu) - \delta$ on pourra toujours agrandir $\frac{1}{2}\varphi(x_1\mu)$ sans que la différence maximum de valeurs de $f(x)$ dépasse μ. En outre $\frac{1}{2}\varphi(x_1, \mu)$ ne pourra être supérieur à $\frac{1}{2}\varphi(x, \mu) + \delta$, sans quoi on pourrait élargir l'intervalle Δ. Mais de

$$\tfrac{1}{2}\varphi(x_1, \mu) \leqq \tfrac{1}{2}\varphi(x, \mu) + \delta$$
$$\tfrac{1}{2}\varphi(x_1, \mu) \geqq \tfrac{1}{2}\varphi(x, \mu) - \delta$$

résulte

$$-2\delta \leqq \varphi(x_1, \mu) - \varphi(x,\mu) \leqq 2\delta.$$

Or δ étant la valeur absolue de $x_1 - x$, $\varphi(x_1, \mu) - \varphi(x, \mu)$ tombe avec $x_1 - x$ au dessous de toute limite.

Il est à remarquer que l'inégalité précédente, quand on l'écrit

$$-2 \leqq \frac{\varphi(x_1, \mu) - \varphi(x, \mu)}{\delta} \leqq 2$$

fixe des limites au quotient différentiel de φ par rapport à x, que ce quotient soit ou non déterminé. Ainsi donc $\varphi(x, \mu)$ est continu ; il existe une valeur minima Δ_0 de Δ, et dans tous les cas au moins un point x, $0 \leqq x \leqq 1$, auquel elle correspond.

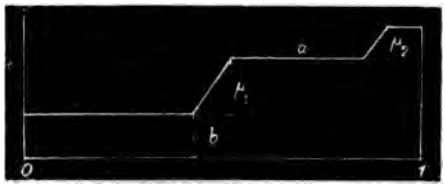
Le minimum Δ_0 de $\Delta = \varphi(x, \mu)$. — La relation entre μ et Δ_0 a beaucoup d'analogie avec celle qui existe entre μ et $\Delta = \varphi(x, \mu)$, quand x est fixe.

Δ_0 tombe au dessous de toute limite. A une valeur particulière μ correspond une valeur Δ_0 déterminée, et si μ, varie, Δ_0 varie aussi, diminuant ou augmentant en même temps ; mais Δ_0 peut n'être pas fonction continue de μ. Δ_0 doit tomber avec μ au-dessous de toute limite, car, pour une valeur particulière

de x, autour de laquelle $f(x)$ n'est pas constante, $\Delta = \varphi(x, \mu)$ tombe au dessous de toute limite. Ainsi pour la valeur particulière x_1, Δ_0 comme minimum est toujours $\leqq \varphi(x_1, \mu)$.

En outre il résulte de la définition de Δ_0 qu'à chaque μ correspond un seul Δ_0. Il faut encore montrer qu'à deux μ différents correspondent deux Δ_0 différents. Admettons que μ ait diminué jusqu'à μ_1, et qu'à ces deux valeurs de μ correspondent des minima Δ_0 égaux. Soit x_0 le milieu de Δ, pour μ, x_1, pour μ_1 x_0 ne peut tout d'abord être égal à x_1, parce que $\varphi(x, \mu)$, x étant fixe, varie avec μ. Mais, pour la même raison x_1 ne peut pas être $\lessgtr x_0$ parce que $\varphi(x_0, \mu_1) < \Delta_0$. Δ_0 doit donc varier quand μ varie, et il doit pour la même raison et à fortiori diminuer.

Δ_0 peut n'être pas fonction continue de μ comme le montre la figure suivante sur laquelle on peut étudier la variation de $\Delta = \varphi(x, \mu)$:



Le trait accentué figure $f(x)$, et nous supposons $\mu_1 < \mu < \mu_1 + \mu_2$. Alors le minimum Δ_0 sera $> a$ jusqu'à ce que μ s'abaisse à μ_1. Dès que $\mu = \mu_1$, Δ_0 devient b. —

Si au contraire Δ_0 est l'argument et μ la fonction, la relation $\mu = P(\Delta_0)$ est tout-à-fait analogue à la relation $\mu = \rho(x, \Delta)$, pour un x déterminé, autour duquel $f(x)$ n'est pas constante.

$\mu = P(\Delta_0)$ *décroît quand* Δ_0 *décroît sans jamais croître ; cette fonction peut, pendant que* Δ_0 *diminue d'une manière continue, demeurer constante sur certaines étendues, mais elle tombe avec* Δ_0 *au-dessous de toute limite.*

De ces simples considérations nous tirons aisément des propositions utiles sur la continuité des fonctions.

De $\mu = \rho(x, \Delta)$ résulte

$$f(x) - f(x + \Delta) = \rho(x, \Delta).\ K,$$

où $K \leqq 2$, et où $\rho\ (x, \Delta)$ représente une fonction tombant en même temps que Δ, sans jamais croître, au-dessous de toute limite. En posant $2\rho\ (x, \Delta), = r\ (x, \Delta)$, nous obtenons

$$f(x) - f(x + \Delta) = r\ (x, \Delta).\ K,\ K \leqq 1$$

comme formule de définition de la continuité. Elle est encore valable, comme on s'en rend compte aisément, si $f(x)$ n'est continue qu'au point x. Pour la nature de la continuité, la fonction $r\ (x, \Delta)$ est caractéristique. C'est la quantité que j'ai nommée *degré de continuité au point x*. (*) J'y reviendrai plus loin.

Enfin, il résulte de $\mu = P\ (\Delta_0)$ que

$$f\ (x) - f(x + \Delta) = P\ (\Delta).\ K,\ K \leqq 1$$

pour tout point x de l'intervalle (0,1), — où $P\ (\Delta)$ désigne une quantité décroissante avec Δ, sans jamais croître, et finissant par tomber au-dessous de toute limite.

Cette égalité signifie en somme que le degré de continuité de la fonction a un minimum, ce qui n'était pas plus nécessaire que le fait qu'une fonction ait dans un intervalle une valeur minimum, puisqu'elle peut tomber au-dessous de toute limite. Mais, en faisant abstraction du degré de continuité que nous ne voulons pas encore définir ici avec une complète précision, voici ce qu'on déduit de l'égalité précédente :

Pour toute quantité Δ on peut déterminer une quantité μ différente de zéro telle que, en supposant $\delta \leqq \Delta$, et $0 \leqq x \leqq 1$, on ait.

$$f\ (x) - f(x + \delta) < \mu$$

La différence $f(x) - f(x + \delta)$ tombe donc en même temps dans l'intervalle entier au-dessous de toute limite, non pas à coup sûr avec la même rapidité aux divers points. Mais on peut déterminer des quantités μ_1, μ_2, ... se succèdant aussi rapidement qu'on veut et y faire correspondre des intervalles Δ_1, Δ_2, .. de telle sorte que pour $\delta \leqq \Delta_1$, $\leqq \Delta_2$, ... $f(x) -$

(*) Zur Geschichte der trigonometrischen Reihen, Tübingen H. Laupp, (page 41). Comptes rendus, 18 avril 1881. J'ai depuis amplement discuté cette matière dans un mémoire qui vient de paraître dans le centième volume du Journal de Mathématiques pures et appliquées (Ancien Journal de Crelle), sous le titre « Ueber den convergengrad der variabeln Reihen und der stetigkeitsgrad der Functionen zweier argumente. »

$f(x+\delta)$ soit dans tout l'intervalle $< \mu_1, \mu_2, \ldots$ Cette remarque importante a été faite par M. Heine (*) qui a nommé cet état de choses *continuité uniforme*. Je n'aime pas cette dénomination. Elle éveille de fausses représentations, quand on est armé du concept du degré de continuité. On nommerait alors uniformément continue dans un intervalle une fonction qui y possède tout le temps le même degré de continuité, comme pour toute valeur de x les fonctions e^x, $\sin x$. Et c'est alors un théorème dû à Ampère que des fonctions ne peuvent être uniformement continues que si Δ est le degré de continuité de $f(x) - f(x+\Delta)$. Une fonction $\sqrt{x}$ ne serait pas uniformément continue dans l'intervalle $o \leqq x \leqq 1$, car pour $x = o$, $\sqrt{\Delta}$ est son degré de continuité. A mon avis, on se conforme mieux aux faits, en nommant l'égalité

$$f(x) - f(x+\Delta) = P(\Delta).K$$

le principe de limitation du degré de continuité.

63. — De la continuité anorthoïde. — La condition de continuité à l'intérieur d'un intervalle entier implique une restriction notable du concept général de fonction. On ne saurait pourtant y attacher trop d'importance. C'est que nous sommes loin de pouvoir nous former une image convenable de la marche d'une fonction soumise à cette seule condition, comme cela a lieu pour les fonctions élémentaires de l'analyse. Bien plus, l'Empiriste (art. 37, 8) a déjà dit que la ligne de démarcation ou plutôt la zône de séparation des dépendances orthoïde et anorthoïde traverse le domaine des fonctions continues, de sorte qu'il y a une continuité anorthoïde qui fait encore l'objet d'un chapitre intéressant de la théorie générale des fonctions. Il y a plus : Si on approfondit ces considérations, on voit bientôt que la continuité orthoïde a précisément le caractère de l'exception, de la particularité, vis-à-vis de la continuité anorthoïde qui est à priori beaucoup plus vraisemblable. Il faudra pourtant étudier cela avec plus d'exactitude dans la théorie du quotient différentiel. Je voudrais ici insister encore un peu sur notre impuissance, signalée par l'Idéaliste (art. 39), à nous former une représentation de la continuité anorthoïde.

Je considère le groupe de fonctions V de l'art. 58

$$\Sigma \lambda_p \sin, \cos (m_p x_1 \quad (**)$$

(*) Borch. Journ. vol. 74, p. 188.

(**) Dans l'article 58 il y a μ_p au lieu de λ_p—[1] ,— j'écris égalemen sans préciser *sin* ou *cos*, parce que dans certains exemples le *sin* est plus commode.

Cette forme analytique peut fournir à une bonne partie de la théorie générale des fonctions des exemples instructifs. Aussi y consacrerai-je un chapitre spécial. Suivant l'accroissement relatif de p, m_p, λ_p^{-1}, elle fournit une suite graduée de fonctions qui conduit des fonctions les plus générales aux fonctions continues de variables complexes.

En supposant que λ_p^{-1} croisse en même temps que p, d'abord assez lentement, nous rencontrons premièrement des fonctions partout discontinues non intégrables, puis des fonctions partout discontinues intégrables. Ensuite commence et se continue, pour une détermination convenable des m_p, la classe des fonctions continues sauf en des points isolés ou sans exception, non différentiables — et des fonctions différentiables. Vient ensuite, λ_p^{-1} croissant de plus en plus rapidement, et m_p croissant convenablement, la foule des fonctions continues avec tous leurs quotients différentiels, mais non représentables par la série de Taylor, et enfin on parvient au domaine des fonctions, exprimables en séries entières, de la théorie des fonctions complexes.

Imaginons maintenant une fonction $f(x) = \lim_{n=\infty} f_n(x) = \lim_{n=\infty} \sum_1^\infty \lambda_p \cos m_p x$, qui représente une fonction anorthoïde continue, non différentiable. On peut sans doute se représenter la marche d'une seule fonction $\lambda_p \sin m_p x$. On peut aussi, si grand que soit n, imaginer tracée une figure nette de la fonction $f_n(x)$, et on reconnaîtra clairement que la tangente n'y possède pas de position limite déterminée, et la fonction $f_n(x)$ restera toujours à nos yeux, quelque grand que soit n, une limitation d'aire plane. Voilà évidemment tout ce que nous sommes en état de nous représenter. Dès qu'on passe de la fonction $f_n(x)$ à la fonction $f(x) = \lim_{n=\infty} f_n(x)$, toute représentation cesse. Je remarque expressément que cela ne tient pas à une trop grande complexité ; la fonction cesse d'être représentable *en principe*, comme l'infini, l'infiniment petit, l'action à distance, comme la véritable essence des choses, comme tout ce qui exigerait, pour être perçu, des sens que nous n'avons pas.

Les fonctions anorthoïdes ne peuvent correspondre à aucune image, et nulle image de fonction ne peut être envisagée comme approximation d'une pareille fonction.

Si on fait croître assez vite le nombre n dans $f_n(x)$, tout intervalle entre nombres dyadiques, à numérateurs différent de

1 et à dénominateurs croissant indéfiniment, contiendra des maxima de la fonction oscillante $f_n(x)$. Passe-t-on à la limite à la manière de l'Idéaliste, des nombres dyadiques naît la pantachie complète, et dans les intervalles entre les nombres subsistent les maxima. Pour se former une représentation réelle de la fonction $f(x)$, la première condition serait donc qu'on pût se représenter la pantachie complète de l'Idéaliste, ou, au moins quelque chose d'approchant. Nous avons vu que cela est impossible; mais il s'y ajoute cette condition essentielle de se faire une image de l'infiniment petit *dans son rapport avec le fini*, ce qui est également impossible.

Pour l'Idéaliste, la correspondance géométrique des valeurs de fonction à la pantachie complète des valeurs d'argument ne cesse donc pas, mais sans répondre même d'une façon approchée à une image. Aussi il n'est pas impossible que des considérations ou conclusions auxquelles l'ensemble des valeurs de $f_n(x)$ sert de fondement, quand on les étend à l'équivalent géométrique de la fonction $f(x)$, comme dit l'Idéaliste, donnent lieu à des paradoxes.

L'Empiriste peut-il se faire une image approchée de la dépendance anorthoïde? Naturellement non, car elle existe pour lui aussi peu que la pantachie complète comme système de points. Pour l'Empiriste, la fonction de tout-à-l'heure $f(x)$ ne désigne qu'une formule, qui permet de calculer pour toute valeur d'argument une valeur de fonction avec une approximation arbitraire. Elle détermine donc pour tout argument rationnel ou irrationnel, ou pour toute loi qui répond à une valeur d'argument irrationnelle, une loi correspondante remplaçant, pour ainsi dire, la valeur de fonction.

64. — Construction numérique des valeurs de fonction hypothétiques. — L'image géométrique des fonctions qui en possèdent une nous dispense de maintes démonstrations pour l'existence de certaines valeurs particulières de la fonction, qu'il arrivera de supposer, comme, par exemple, s'il s'agit de la plus grande et de la plus petite dans un intervalle.

Si une démonstration aussi bien qu'une explication consiste au fond dans un enchaînement satisfaisant de représentations, liant une représentation troublante à une représentation finale bien familière, l'image curviligne des fonctions peut pleinement nous suffire comme représentation finale. On la restreindra selon les rigueurs de la précision mathématique, et on exigera peut être de telles courbes que leur marche possède les propriétés essentielles des courbes algébriques.

Or, les considérations de l'article précédent montrent que toujours dans les fonctions anorthoïdes une représentation finale familière de ce genre fait absolument défaut. Il ne s'y trouve pas d'intuition déterminée et nette à laquelle nous puissions nous référer. L'analogie des courbes représentables *peut* fournir quelque chose de juste, seulement nous n'en avons aucune garantie. Personne, par exemple, ne sentira la nécessité d'une démonstration pour ce fait qu'une fonction comme x^n, $\sin x$, etc, entre deux points qu'elle lie d'une manière continue, prend toute valeur intermédiaire. Mais dans les fonctions anorthoïdes, cette proposition n'est nullement évidente. Leur image pour l'Empiriste n'est jamais qu'une masse aussi compacte que l'on veut de points séparés, et la proposition ne pourra donc résulter que de la condition analytique de la continuité.

Dès que nous accordons à l'image curviligne une plus grande multiplicité que ne présente, par exemple, le concept des courbes algébriques, nous voyons que l'intuition, quand il peut en être question n'est sûre que si elle se fonde sur une expérience suffisante. Un exemple très instructif est offert par cette proposition : une fonction toujours finie dans une intervalle y renferme une valeur maxima et une valeur minima. — Un profane dans le domaine expérimental de la théorie des fonctions est prêt à l'accorder tout de suite : et pourtant elle est fausse déjà pour des fonctions qui sont orthoïdes à l'exception de certains points particuliers. En vérité nous ne le savons que parce que les discontinuités des formules de Fourier, et depuis d'autres exemples sans nombre, comme les fonctions Ia de l'article 58, nous l'ont appris.

D'ailleurs par intuition on conclut souvent à des dépendances limites, dont l'existence ne doit pas à la vérité être mise en question, mais qui, à cause de leur mode de formation également compliqué pour l'Idéaliste et pour l'Empiriste, ne peuvent nullement être considérées comme établies avec la rigueur mathématique. J'ai en vue entre autres les courbes enveloppes qui peuvent prendre naissance de deux manières. Une enveloppe est ou bien (pour l'Idéaliste) le lieu des points d'intersection successifs des individus en nombre infini d'une suite infiniment dense de courbes ; — ou bien la limite du contour du domaine total que couvrent les segments d'aire plane limités par les courbes individuelles.

Qu'il s'agisse, par exemple, d'enveloppe de cercles. Dans le cas le plus simple où les centres d'une série de cercles égaux décrivent une ligne droite, l'enveloppe se compose évidemment de droites parallèles à celle-là. Seulement si les cercles ne sont

pas égaux, ou si le lieu de leurs centres n'est pas une droite, ou enfin que ni l'un ni l'autre n'ait lieu, la formation de la courbe enveloppe ou de ses points isolés n'est pas, même avec les fonctions les plus familières, d'une nécessité tellement évidente qu'on ne sente vivement le besoin, pour l'établir de procéder avec plus de rigueur qu'on n'a l'habitude de le faire. A plus forte raison ce sera le cas, si les centres ou les rayons des cercles sont soumis à une variation anorthoïdique. Qu'on tire l'enveloppe, par exemple, de cette représentation que les cercles couvrent un domaine dont le contour a pour limite, quand leur nombre augmente, l'enveloppe des cercles, — celle-ci sera également anorthoïdique. Mais nous avons vu qu'une dépendance anorthoïdique qui n'est pour l'Empiriste qu'un système de points aussi resserré qu'il veut, ne peut être considérée comme limitation d'un *domaine* ; l'existence de la fonction qui correspond à la courbe enveloppe ne peut donc pas être démontrée de cette façon.

La méthode de démonstration de l'existence des valeurs de fonction hypothétiques consiste en ceci : que l'on montre comment elles peuvent être exprimées numériquement, par exemple, par une fraction décimale dont on pourrait calculer chaque chiffre, si les quantités indéterminées du problème étaient données numériquement. J'ai déjà donné (art. 46), en formant l'expression de la limite d'une suite de quantités croissantes, un exemple de pareilles *Constructions numériques*, comme je les ai nommées ; je vais dans cet article construire numériquement quelques autres valeurs de fonction hypothétiques, et mon choix est tombé sur des théorèmes tout particulièrement connus et auxquels beaucoup d'autres analogues peuvent se ramener. J'observe pourtant qu'il ne faut pas songer ici à épuiser l'objet ou seulement à donner une vue générale des espèces possibles de valeurs de fonction hypothétiques numériquement représentables, que les recherches peuvent mettre au jour dans la théorie générale des fonctions.

1. — *Pour toute fonction* f (x) *et dans tout intervalle* (a, b) *de son argument, où elle reste comprise entre des limites finies, — il y a une valeur minima qu'elle ne dépasse pas dans cet intervalle, et une valeur maxima à laquelle elle n'est pas inférieure. Nous nommons de préférence ces valeurs « limites supérieure et inférieure des valeurs de fonction. »*

Démonstration de l'existence de la limite supérieure. — Supposons, ce qui n'est pas une restriction, la fonction $f(x)$

> 0 dans l'intervalle (a, b), et considérons les intervalles de fonction :

$$0 \leqq y \leqq 1, 1 < y \leqq 2, 2 < y \leqq 3, \ldots \ldots n < y \leqq n + 1.$$

Si nous considérons maintenant l'ensemble des valeurs de fonction $f(x)$ dans l'intervalle (a, b), il y aura un dernier intervalle $\alpha_0 < y \leqq \alpha_0 + 1$, où tomberont encore des valeurs de fonction appartenant à l'intervalle (a, b).

C'est d'une affirmation semblable que découlent la plupart des démonstrations de ce genre. Or, puisqu'il intervient un ensemble de valeurs de fonction, il nous faut l'examiner de plus près. Pour l'Idéaliste il n'y a là rien qui ne soit irréprochable. Il a en vue son équivalent de fonction géométrique consistant en toutes ses valeurs de fonction construites sur toutes les valeurs d'argument d'une étendue (a,b); et quand il s'agit de savoir si des valeurs de fonction appartenant à cet ensemble tomberont ou non dans un intervalle de valeurs, il lui importe peu que le nombre des valeurs de fonction soit fini ou infini; ou bien il tombe des valeurs de fonction dans l'intervalle, ou bien il n'y correspond aucune de ces valeurs : *tertium non datur*. — L'Empiriste se heurte au contraire à des difficultés qui naissent de son concept de l'argument, puisque la pantachie complète des valeurs d'argument considérées simultanément, ou des valeurs de fonction correspondantes n'existe pas pour lui. Toutefois, à l'égard ce ces difficultés, la limitation du concept général de fonction établie au commencement de ce chapitre, lui vient en aide. Si on s'en tient au concept de fonction de l'Empiriste, notre proposition est également irréprochable, car la fonction consiste, à ses yeux, en formules valables pour des ensembles dénombrables de points particuliers de l'argument, et en une formule générale pour le reste de la pantachie complète de l'argument. Considérons d'abord cette dernière formule générale, sans tenir compte des points exceptés. De quelque manière que l'on s'imagine cette formule, analytiquement ou d'après la théorie des nombres, il faut que sa signification soit telle que nous puissions décider si les relations

$$n < f(x) \leqq (n + 1), \; a \leqq x \leqq b,$$

sont ou non possibles en même temps. C'est là le résidu logique de la question, l'hypothèse nécessaire de l'Empiriste, Quant aux ensembles dénombrables des valeurs de fonction exceptées, les limites supérieure et inférieure ont toujours, pour elles un sens très clair, comme cela résulte de la théorie exposée au chapitre suivant, des limites d'indétermination.

Pour la démonstration qui nous occupe, il nous suffit de nous en rapporter à cette proposition évidente que les valeurs individuelles d'une suite quelconque de quantités toujours finies, finiront ou non par dépasser une quantité donnée d'avance.

Après ces réflexions, la suite de la démonstration est très simple $\alpha_0 < y \leqq \alpha_0 + 1$ était le dernier intervalle de la suite.

$$o \leqq y \leqq 1,\ 1 < y \leqq 2,\ 2 < y \leqq 3, \text{ etc.}$$

où tombaient des valeurs de fonction correspondant à l'intervalle d'argument (a, b). Partageons l'intervalle $\alpha_0 < y \leqq \alpha_0 + 1$ en dixièmes

$$\alpha_0 + \frac{n}{10} < y \leqq \alpha_0 + \frac{n+1}{10},\ n = 0, 1, 2, \ldots 9$$

Parmi ces intervalles il y en aura encore un dernier contenant des valeurs de fonction $f(x)$, $a \leqq x \leqq b$. Pour ce dernier, soit $n = \alpha_1$. Continuons de même. Comme terme de ce processus, nous obtenons une valeur

$$y = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots$$

qui est la limite supérieure en question des valeurs de $f(x)$ dans l'intervalle (a, b). D'après son mode de formation, aucune autre valeur particulière de la fonction ne peut la dépasser, car les valeurs de fonction ne dépassent pour aucune valeur de p la quantité $\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots (\alpha_p + 1)$, et la différence entre cette quantité et la fraction décimale sans fin $\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p$, lorsque p croît, tombe au-dessous de toute limite. Il n'y a pas de valeur plus petite jouissant de cette propriété, car toute valeur plus petite est dépassée par une valeur $\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p$, et toute valeur de cette forme est dépassée par les valeurs de la fonction.

Remarque complémentaire. — Il est à peine nécessaire d'ajouter que le théorème est encore vrai dans le cas d'un intervalle indéfini, si, par exemple, cet intervalle comprend toutes les valeurs d'argument $x \geqq a$, intervalle que nous désignerons ainsi (a, ∞). Car par la substitution $x = \frac{1}{y}$ à tout argument de l'intervalle (a, ∞) correspond un et un seul argument de l'intervalle $\left(\frac{1}{a}, o\right)$.

A cette proposition qui s'applique aux fonctions en général s'en rattachent d'autres ayant trait à des fonctions soumises à certaines restrictions, comme l'intégrabilité d'abord, puis la continuité. Il sera question plus tard de l'anorthoïdie intégra-

ble. Pour le moment, nous devons démontrer quelques propositions particulièrement utiles, concernant les fonctions soumises à la condition de continuité ; (il en est une d'ailleurs sur laquelle nous nous sommes déjà plusieurs fois appuyé). Ce sont des conséquences directes de la proposition suivante réduite à sa plus simple expression.

II. *Soit une fonction* $f(x)$ *continue dans l'intervalle* $(0, 1)$, *supposons* $f(0) > f(1)$; *enfin soit* y' *une valeur quelconque satisfaisant à l'inégalité* $f(0) > y' \geqq f(1)$; *il y a toujours une valeur minima* x' $(0 < x' \leqq 1)$, *pour laquelle on a* $f(x') = y'$.

Démonstration. — Partageons l'intervalle $(0, 1)$ en dixièmes :

$$o \leqq x \leqq 0,1 \; ; \; 0,1 < x \leqq 0,2, \text{ etc.}$$

et soit $o, \alpha_1 < x \leqq o, \alpha + 1$ le premier dixième où les valeurs de fonction ne sont pas toutes $> y'$. Partageons de nouveau en dixièmes l'intervalle $o, \alpha_1 < x \leqq o, \alpha_1 + 1$, et soit $o, \alpha_1 \alpha_2 < x \leqq o, \alpha_1 \alpha_2 < 1$ le premier centième d'intervalle $(0, 1)$ où les valeurs de fonction ne sont pas toutes $> y'$, etc. Soit alors

$$x' = o, \alpha_1 \alpha_2 \ldots$$

Il faut démontrer l'égalité $f(x') = y'$.

Dans l'intervalle $o, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p < x < o, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p + 1$, soient $\overset{(p)}{y_g}$, $\overset{(p)}{y_k}$ les limites supérieure et inférieure des valeurs de fonction $f(x)$. Nous avons simultanément

$$\overset{(p)}{y_g} \geqq y' \geqq \overset{(p)}{y_k}$$

$$\overset{(p)}{y_g} \geqq f(x') \geqq \overset{(p)}{y_k}$$

Or la différence entre $\overset{(p)}{y_g}$ et $\overset{(p)}{y_k}$, lorsque p augmente, peut devenir aussi petit que l'on veut ; il ne saurait donc y avoir de différence entre y' et $f(x')$, car cette différence devrait être indépendante de p.

Si c'est l'intervalle (a, b) au lieu de $(o, 1)$, dans lequel la fonction est continue, que l'on prenne pour argument $xa + t(b-a)$, et t ira de o à 1, pendant que x variera de a à b.

De la proposition précédente résulte immédiatement :

II. *Quand une fonction* $f(x)$ *est continue dans un intervalle* (a,b), *il y a pour toute valeur* y' *située entre* $f(a)$ *et* $f(b)$ *une valeur* x' *située entre* a *et* b, *telle que* $f(x') = y'$. *S'il existe plusieurs valeurs intermédiaires* x' *de ce genre, il s'en trouve parmi elles une qui est la plus petite* x'_1 *et une qui est la plus*

grande x_2'. *Pour ces valeurs on a donc les relations :*

$$a < x_1' < x_2' < b$$

$$f(a) \gtrless f(x_1') = f(x_2') = y' \gtrless f(b).$$

III. *Une fonction* f (x) *continue dans un intervalle* (a, b) *y devient égale à un certain instant à sa limite supérieure et à sa limite inférieure.* (*)

Démonstration. — Il suffit de considérer, par exemple, la limite supérieure. Je suppose tout d'abord $f(a) \gtrless f(b)$, et, par exemple, $f(a) < f(b)$. Nous pouvons encore pour simplifier poser $f(a) = o$, sauf à lever ensuite facilement cette restriction. Soit maintenant $h = \beta_0, \beta_1 \beta_2 \ldots$ la limite supérieure des valeurs de fonction $f(x)$ dans l'intervalle (a, b) ; la fonction, d'après la définition de cette limite, prend dans (a, b) des valeurs comprises dans l'intervalle $(h - \delta, h)$ si petit que soit δ. Supposons $h - \delta > \beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_p$, et soit $f_{h-\delta}$ une valeur de fonction satisfaisant à la condition $h - \delta < f_{h-\delta} < h$. On peut alors concevoir, au sens de la proposition II, les quantités $\beta_0; \beta_0. \beta_1; \beta_0. \beta_1 \beta_2, \ldots\ldots \beta_0, \beta_1 \beta_2 \ldots\ldots \beta_p \ldots\ldots$ Comme valeurs intermédiaires de $f(x)$ entre $f(a)$ et $f_{h-\delta}$, auxquelles appartiennent les plus petites valeurs intermédiaires de l'argument, $x_0, x_1 x_2 \ldots\ldots x_p$. En diminuant δ, nous pouvons faire croître p. De là résulte que à la suite illimitée $\beta_0; \beta_0, \beta_1;$ etc. correspond une suite illimitée $x_0, x_1, x_2, \ldots$ de valeurs toujours croissantes, mais n'atteignant pas b, qui possède donc une limite : Appelons-la X. Il faut alors montrer que $f(X) = h$. Limitons autour de X un petit intervalle Δ. Il renferme des valeurs de fonction $\beta_0, \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_p$, que je désignerai par $h - \delta_p$, où par conséquent δ_p, quand p croît où que Δ décroît, tombe au-dessous de toute limite. Soit τ la plus grande différence des valeurs de fonctions $f(x)$ dans l'intervalle Δ. Alors

(*) Cette proposition III est énoncée d'après M. Weierstrass qui la démontre et l'emploie dans ses cours. Elle est donnée sans démonstration par M. Schwarz (Borch. Journ. vol. 72, p. 141, sous la forme suivante : « Une fonction continue $\varphi(x)$ d'une variable réelle x donnée dans un intervalle $a \ldots b$, les limites incluses, atteint le maximum g des valeurs qu'elle prend, au moins pour une valeur x_0 de la variable, telle que $\varphi(x_0) = g$. » En tous cas, M. Weierstrass paraît avoir le premier attiré l'attention sur la nécessité d'énoncer et de démontrer de semblables propositions.

la différence entre $f(X)$ et $h-\delta_p$ n'est pas plus grande que τ, ou la différence entre $f(X)$ et h n'est pas plus grande que $\tau + \delta_p$. Une différence entre $f(X)$ et h est donc impossible, car en resserrant l'intervalle Δ on rend la quantité $\tau + \delta_p$ aussi petite qu'on veut et $f(X)$ et h sont absolument indépendants de l'intervalle Δ.

Quand on a $f(a) = f(b)$, la construction numérique du point X est tout-à-fait analogue. Si les deux valeurs extrêmes de l'intervalle (a, b) sont elles-mêmes les limites supérieure et inférieure, le théorême devient une tautologie.

On obtient dans le premier cas la proposition que voici :

III *a. Si une fonction* $f(x)$ *est continue dans un intervalle* (a, b), *et que l'on ait* $f(a) = f(b)$, *elle devient égale dans cet intervalle à ses limites supérieure et inférieure pour des valeurs intermédiaires* $a < x < b$, *lorsque les valeurs* $f(a) = f(b)$ *ne sont pas elles-mêmes limites supérieure ou inférieure. Si par exemple,* $f(a) = f(b)$ *est limite inférieure,* $f(x)$ *peut ne prendre cette valeur pour aucune valeur intermédiaire de* x, *mais elle devient égale à sa limite supérieure pour quelque valeur intermédiaire de* x, *si on n'a pas constamment* $f(x) = f(a) = f(b)$.

La construction numérique des points des lignes enveloppes est analogue et ne présente aucun intérêt nouveau de nature générale. C'est pourquoi je ne m'attarderai pas plus longtemps là-dessus. (*)

Dans le dernier chapitre de ces éléments, je considérerai une fonction non pas dans un intervalle déterminé, mais pour un accroissement illimité de l'argument. Les propriétés générales de la marche de la fonction qu'on y trouvera concernent naturellement aussi la marche de la fonction dans le voisinage d'un point particulier de son argument.

(*) On en trouve une étude plus serrée. Leip. Math. Ann.-tome XVIII p. 597.

CHAPITRE V

Marche finale des fonctions

65. — Principe général de convergence et de divergence et marche finale des fonctions dont l'argument croît indéfiniment. — Nous avons essayé dans le chapitre précédent de développer le concept de la correspondance de la fonction à l'argument au sens le plus large et avec une rigueur complète. Il nous a suffi de supposer fini l'intervalle des valeurs d'argument. Si cet intervalle s'étend à l'infini et que des valeurs de fonction continuent toujours à y correspondre, les suites sans loi de l'Idéaliste reviennent tout de suite en question. Cependant l'examen de tout ce qu'il est possible d'imaginer dans la *marche finale des fonctions*, c'est-à-dire pour l'accroissement indéfini de l'argument nous enseigne que, indépendamment des intuitions fondamentales de l'Idéaliste et de l'Empiriste, cette marche finale possède certaines propriétés *générales* et qu'on y trouve sans exception certaines quantités et formes de variation dont la détermination exacte, indispensable pour les considérations de limite et de convergence de toute nature forme l'objet de ce chapitre.

Je place en tête le *principe général de convergence*, propriété de la marche finale des fonctions qui a pour conséquence l'existence d'une limite finie, déterminée, $\lim f(x)$.

Nous étudierons à ce sujet les fonctions n'ayant pas de limite finie déterminée, où il intervient deux quantités fixes qui correspondent à la limite de la marche finale convergente, et dans cette marche deviennent égales entre elles et à cette limite. Ce sont les *limites d'indétermination* permettant de conclure par intuition au *principe général de divergence*, suivant lequel la marche finale des fonctions, où manque la propriété supposée dans le principe général de convergence, n'a pas non plus pour terme une limite finie et déterminée.

Cette étude de la marche finale des fonctions, qui a fourni les limites d'indétermination, poussée plus avant pour satisfaire à de nouveaux besoins, nous apprend que la marche finale de toute fonction oscillant d'une manière quelconque, se trouve

renfermée entre deux fonctions variant chacune dans un sens unique. Je les nomme *enveloppes d'indétermination.*

Enfin nous aurons à considérer la vitesse avec laquelle les fonctions qui ne varient que dans un sens croissent ou décroissent. Là intervient le concept de *suites de quantités infinitaires.*

A part ce dernier point qui nous ramènera de nouveau aux intuitions fondamentales, les objets d'étude ci-dessus mentionnés ne se prêtent à la discussion de l'Idéaliste et de l'Empiriste que pour le concept de limite de constructions numériques ou de suites générales de valeurs discontinues ne variant que dans un sens, — et cela seulement en tant qu'une valeur exacte ou exacte à volonté est considérée comme limite. Il en est ainsi en particulier des raisonnements par lesquels nous établissons le principe général de convergence et de divergence. Nous pouvons ne pas distinguer à chaque pas les deux formes d'intuition, et parler des valeurs limites comme le ferait l'Idéaliste. Je reviens là-dessus maintenant parce que nous mettons la dernière main au concept de limite. Son élément essentiel, quoique le plus simple, la limite de suites de valeurs discontinues ne variant que dans un sens, nous l'avons assigné au domaine du concept de grandeur, qu'on ne pouvait compléter que de la sorte d'une façon satisfaisante. Le concept de limite appartient donc en partie au concept de grandeur, seulement il a un contour plus vaste : il pose les conditions générales sous lesquelles des phénomènes quelconques, dont on peut ramener la mesure à celle des quantités linéaires, ont ou non une limite. Ce sont ces conditions que contient le principe général de convergence et de divergence.

Qu'on démontre ce principe à la manière de l'Idéaliste ou de l'Empiriste, les fondements derniers de l'analyse, les deux concepts de grandeur et de limite, sont complètement établis, et le professeur, qu'il écrive ou qu'il parle, n'a plus sujet de « parcourir à pas rapides l'introduction à l'analyse. »

66. — Principe général de convergence et de divergence — Remarque préliminaire. — Nous avons déjà donné au principe général de convergence et de divergence la forme suivante :

Si la différence $f(x_1) - f(x)$, $x_1 > x$, *à partir d'une valeur suffisamment grande de* x *et pour des valeurs arbitraires de la différence* $x_1 - x$, *reste au-dessous d'un nombre choisi aussi petit qu'on a voulu, la fonction* $f(x)$ *a alors une valeur limite déterminée. Mais si, pour n'importe quelle valeur de* x, *si grande qu'elle soit, on trouve pour* $f(x_1) - f(x)$ *(toujours* $x_1 > x$ *) des valeurs supérieures à un petit nombre quelconque mais indépendant de la variation de* x, $f(x)$ *n'a pas de limite.*

La fonction $f(x)$ n'est supposée soumise à aucune restriction. Je remarque expressément que, pour plus de commodité, on peut supposer $f(x)$ donné pour toutes les valeurs particulières de l'argument, et par conséquent complètement déterminé (art. 57) — mais que nos raisonnements n'imposent jamais à la fonction une telle restriction. Lors donc qu'il est question d'une fonction $f(x)$ de (x), il ne s'agit que de valeurs de x pour lesquelles elle est donnée. J'ai en vue, entre autres, la fonction

$$f(n) = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

qui représente la somme de n premiers termes d'une série, et n'existe que pour des valeurs entières de n.

On peut donner du principe général une démonstration préparatoire, pour ne pas dire superficielle, faisant ressortir les points qu'il s'agit d'élucider.

Soit donc $f(x)$ un processus ordonné suivant la variable x, et supposé susceptible de prendre des valeurs supérieures à une quantité choisie à volonté, qu'elle admette ces valeurs d'une manière continue, ou bien par sauts, ou bien par valeurs isolées. Soient x_1 et x_2 deux valeurs de x. Si pour une quantité ε, aussi petite qu'on veut, il n'existe pas une valeur X de x suffisamment grand pour que la différence $f(x_2) - f(x_1)$ $(X \leqq x_1 < x_2)$ ne puisse pas dépasser ε, $f(x)$ *n'a pas une limite finie et déterminée.* En effet, s'il existait pour $f(x)$ une pareille limite Y, il devrait exister, par définition de la limite une valeur X de x suffisamment grande, pour que x étant supposé $\geqq X$, $y - f(x)$, et, par conséquent, $y - f(x_1)$, $y - f(x_2)$, ne surpasse pas en valeur absolue $\frac{\varepsilon}{2}$. La différence de ces deux valeurs ne surpasserait donc pas ε en valeur absolue.

Au contraire, s'il existe pour chaque quantité ε, arbitrairement petite, une valeur X de x pour laquelle $f(x_2) - f(x_1)$ $(X \leqq x_1 < x_2)$ ne surpasse pas ε, *le processus* (fx) *a une limite finie et déterminée.* Car alors on aura

$$f(x_1) - f(x_2) - \varepsilon \leqq 0 \leqq f(x_1) - f(x_2) + \varepsilon$$

ou bien

$$f(x_1) - \varepsilon \leqq f(x_2) \leqq f(x_1) + \varepsilon.$$

Cela veut dire 1° que $f(x_2)$ est enfermée entre des limites finies fixes, si grand que soit x_2, de sorte que $f(x)$ ne peut pas x croissant indéfiniment, croître ou décroître elle-même indéfiniment ; 2° que l'oscillation de $f(x)$ ne peut jamais dépasser 2ε, quantité arbitrairement petite, à partir de la valeur X, suffisamment grande. Et de ces deux faits on conclut à l'existence de la limite Y.

La démonstration du principe de divergence que nous venons de donner est parfaitement exacte et doit suffire à toutes les exigences pratiques. Seulement elle laisse subsister un certain vide. La divergence d'un processus peut dériver de tant de causes que notre démonstration embrasse dans un même raisonnement, qu'on en reste pourtant à se demander sur quoi se fonde en réalité cette divergence. Ceci nous engage de nouveau à examiner géométriquement la marche finale des fonctions, comme si cette démonstration n'existait pas.

La démonstration du principe de convergence au contraire n'est pas suffisante même pratiquement. Car, nous fondant sur les deux faits que $f(x)$ reste finie et qu'à partir de valeurs suffisamment grandes de x, son oscillation devient arbitrairement petite, nous présumons avec la plus grande vraisemblance l'existence de la limite ; mais il faut montrer comment elle s'ensuit *avec nécessité*. La démonstration n'est donc pas complète.

Dans l'article suivant nous comblerons cette lacune qu'on ne saurait laisser subsister dans la démonstration d'un des théorèmes les plus généraux et les plus importants de l'analyse.

Pour développer ensuite tout le contenu du principe de divergence, nous renfermons dans ces limites fixes les diverses manières suivant lesquelles une fonction suit son argument jusqu'à l'infini : Nous reconnaissons ainsi d'un point de vue plus élevé dans quelle circonstance se présente la chose particulière qui se nomme limite, et parvenons alors à une réelle intelligence du principe général.

67. — Principe général de convergence avec des propositions complémentaires. — C'est donc la variation de la différence $f(x_1) - f(x)$, $x_1 > x$, x croissant indéfiniment, qui établit une première classification pour la marche finale des fonctions.

La première proposition de convergence est la réciproque d'une conséquence immédiate de la propriété essentielle de la limite. Si $f(x)$ croissant indéfiniment, a une limite y, c'est-à-dire si des différences de la forme $y - f(x)$, $y - f(x_1)$,....ont la limite zéro, quand x, x_1, ... prennent une suite quelconque de valeurs croissant sans limite, — alors zéro est aussi la limite de la différence $f(x_1) - f(x)$ de deux pareilles différences $y - f(x)$, $y - f(x_1)$. La réciproque s'énoncera ainsi :

I. *Si la différence* $f(x_1) - f(x)$, $x_1 > x$, *x croissant indéfiniment, a pour limite zéro, il existe une quantité* y *telle que* $y - f(x)$ *a aussi la limite zéro pour la même variation de x.*

Démonstration.— Puisque $f(x_1) - f(x)$ peut devenir aussi petit qu'on veut pour des valeurs de x suffisamment grandes, fixons une valeur x' telle que pour $x' \leqq x < x_1$, la valeur absolue de $f(x_1) - f(x)$ ne dépasse pas une quantité ε' choisie aussi petit qu'on aura voulu. Le valeur de $f(x)$ tombera alors pour toute valeur $x > x'$ dans l'intervalle $(fx') - \varepsilon', f(x') + \varepsilon')$, Posons $f(x') - \varepsilon' = \alpha', f(x') + \varepsilon' = \beta'$. Fixons ensuite $x'' > x'$ telle que pour $x'' \leqq x < x_1$, la valeur absolue $f(x_1) - f(x)$ ne dépasse pas $\varepsilon'' < \varepsilon'$. La valeur $f(x)$ tombera alors, pour $x > x''$, dans l'intervalle $(f(x'') - \varepsilon'', f(x'') + \varepsilon'')$. Celui-ci peut ne pas appartenir tout entier à l'intervalle (α', β'), mais une seule des valeurs $f(x') - \varepsilon'', f(x'') + \varepsilon''$ peut tomber en dehors de (α', β'). Désignons par (α'', β'') la partie de l'intervalle $(f(x'') - \varepsilon'', f(x'') + \varepsilon'')$ qui appartient à $(\alpha' \beta')$ $f(x)$ reste à partir de $x = x''$, dans l'intervalle $(\alpha'' \beta)$, qui est $\leqq 2\varepsilon''$. De cette façon nous pouvons assigner à $f(x)$ des intervalles de plus en plus petit. Fixons $x''' > x''$ de telle façon que la valeur absolue de la différence $f(x') - f(x)$, pour $x''' \leqq x < x_1$, ne dépassent pas $\varepsilon''' < \varepsilon''$, et désignons par (α''', β''') la portion de l'intervalle $f(x''') - \varepsilon''', f(x''') + \varepsilon''')$ qui appartient à $(\alpha'' \beta'')$. A partir de $x = x''', f(x)$ variera dans l'intervalle $(\alpha''' \beta''') \leqq 2\varepsilon'''$, et ainsi de suite. Les suites de valeurs $\alpha', \alpha'', \alpha''', \ldots \beta', \beta'', \beta''' \ldots$, qui ne varient que dans un sens ont chacune une limite, et ces limites sont égales si $\varepsilon', \varepsilon'', \varepsilon''', \ldots\ldots$ ont pour limite zéro. Soit y la limite commune aux α et aux β. On pourra toujours indiquer une valeur x de x assez grande pour que, x étant $\geqq x$, la valeur absolue de $y - f(x)$ reste au-dessous d'une quantité petite fixée d'avance $2\bar{\varepsilon}$. On a $\varepsilon^r \leqq \bar{\varepsilon} < \varepsilon^{(r+1)}$, de même $\bar{x} = x^{(r)}$.

Si la fonction $f(x)$ n'est constante dans aucun intervalle de l'argument, cas qui n'est pas exclu de la démonstration précédente, les valeurs $x', x'', x''', \ldots$, croissent infiniment. C.Q.F.D.

On peut encore démontrer la proposition autrement, en construisant numériquement la limite Y. Toutefois la démonstration précédente, qui n'est pas longue, satisfaira le lecteur.

Il y a une proposition assez générale, sans l'être autant que I, qui est souvent utile ; c'est la proposition III de l'article 46, étendue des valeurs discontinues aux fonctions.

II. *Une fonction* f (x), *ne variant que dans un sens et qui reste comprise entre des limites finies, possède toujours une limite déterminée quand l'argument croît indéfiniment.*

A une époque, où je considérais cette proposition comme un axiome devant former le concept propre de limite, je me

donnai beaucoup de mal pour en déduire la proposition I. Je voulus me persuader que la proposition II est le premier principe. Toutefois entre ces deux-là et celle qui est relative à la limite de suites de valeurs discontinues variant dans un sens unique, il existerait plutôt le rapport que voici : La dernière est en réalité le premier principe, en tant qu'elle permet de passer des limites les plus élémentaires qu'on peut imaginer, comme les limites de fractions décimales posées par nous comme fondement, aux propositions générales I et II. Mais l'expression la plus générale comprenant tous les cas particuliers est certainement la proposition I.

La limite dont II affirme l'existence dans les conditions énoncées peut sans difficulté se représenter numériquement, comme nous allons le montrer. Mais les hypothèses qu'énonce cette proposition peuvent se ramener aussi facilement à celles de la proposition I. Voici une démonstration concluante de la proposition II.

Supposons que $f(x)$ augmente sans cesse pendant que x croît indéfiniment, qu'elle ne dépasse pas une quantité fixe, et qu'elle ne reste jamais invariable à partir d'une valeur de x. Il y a alors dans tous les cas un plus grand multiple α_0 de l'unité de longueur que $f(x)$ dépasse en croissant, sans quoi cette fonction croîtrait au-delà de toute limite. La fonction $f(x)$ ne peut pas atteindre le multiple suivant, car elle devrait alors le dépasser en vertu de l'hypothèse qu'elle ne reste jamais constante. Partageons maintenant l'étendue qui s'étend de α_0 à $\alpha_0 + 1$ en dixièmes de la longueur unité. Il y a alors un plus grand multiple α_1 de $\frac{1}{10}$ ($\alpha_1 < 10$) qui sera dépassé par $f(x) - \alpha_0$, tandis que $\alpha_1 + 1$ dixièmes ne seront pas atteints, $f(x)$ varie ainsi, à partir d'une valeur suffisamment grande de x, entre $\alpha_0\ \alpha_1$, et $\alpha_0\ \alpha_1 + 1$. Puis elle varie, à partir d'une valeur plus grande de x, entre $\alpha_0\ \alpha_1\ \alpha_2$ et $\alpha_0\ \alpha_1\ \alpha_2 + 1$, etc. Soit

$$Y = \alpha_0, \alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ldots$$

Quand $f(x)$, pour $x = x_p$ a dépassé la quantité $\alpha_0, \alpha_1\ \alpha_2\ \ldots \alpha_p$, on a, pour $x > x_p$,

$$\alpha_0, \alpha_1\ \alpha_2\ \ldots \alpha_p < f(x) \leqq \alpha_0, \alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \overline{\alpha_p + 1}$$

ou $f(x) - \alpha_0, \alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_p < \frac{1}{10^p}$

On a aussi

$$Y - \alpha_0, \alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_p < \frac{1}{10^p}$$

Si donc on retranche cette deuxième différence de la précédente, on a à fortiori

$$Y - f(x) < \frac{1}{10^p}$$

et on peut rendre cette différence aussi petite qu'on veut, en prenant p assez grand, et, par conséquent, en choisissant assez grande la limite inférieure des valeurs de x. Y est dont la limite de $f(x)$, C. Q. F. D.

De ce que $f(x)$ *croissant constamment ne dépasse pas une limite finie on déduira la condition de la proposition I, à savoir que* $f(x_1) - f(x)$, $x_1 > x$, *quand* x *croît indéfiniment a pour limite zéro.* Si, en effet, il n'existait pas de valeur x' telle que pour $x' < x < x_1$, la différence $f(x_1) - f(x)$ ne dépasssât plus une quantité ε, prise aussi petite qu'on aurait voulu, il y aurait nécessairement pour toute valeur de x, une valeur plus grande x_1 pour laquelle $f(x_1) - f(x) > \varepsilon$. Et si on forme une suite illimitée de pareilles valeurs x, x_1, x_2, ... de $f(x_1) - f(x) > \varepsilon$, résulte $f(x_2) - f(x_1) > \varepsilon$, etc. de sorte que $f(x)$ croîtrait indéfiniment, ce qui est contre l'hypothèse.

J'ajoute à cette étude du principe de convergence des propositions complémentaires. La condition de la première proposition, que $f(x_1) - f(x)$ doive tomber au-dessous de toute limite, peut-être parfois, surtout dans le cas de variables imaginaires, avantageusement remplacée par une autre, comme on va le voir.

III. — *Si le quotient* $\frac{f(x_1)}{f(x)}$ *a pour lim* 1 *grand* x *et* x_1 *croissent indéfiniment,* $f(x)$ *possède toujours une limite. Seulement* $f(x)$ *peut aussi, sans que cette condition soit remplie, avoir une limite, si zéro est cette limite. Alors, au lieu du quotient simple c'est* $\frac{f(x_1) + \alpha}{f(x) + \alpha}$, *où* α *a une valeur arbitraire, qui a pour lim* 1.

Si $\frac{f(x_1)}{f(x)}$ a pour limite 1, $f(n)$ ne peut croître au-delà de toute limite, car pour $x_1 > x$, ce quotient pourrait prendre une suite de valeurs aussi grandes qu'on voudrait. Mais si $f(x)$ ne peut croître au-delà de toute limite, il résulte de l'égalité

$$\frac{f(x_1)}{f(x)} - 1 = \frac{f(x_1) - (fx)}{f(x)}$$

que $f(x_1) - f(x)$ a pour lim zéro en même temps que $\frac{f(x_1)}{f(x)} - 1$.

Puis de

$$f(x_1) - f(x) = f(x) + \alpha \left(\frac{f(x_1) + \alpha}{f(x) + \alpha} - 1\right)$$

il résulte que le second facteur s'évanouit en même temps que $f(x_1) - f(x)$, et réciproquement.

IV. — *Si la différence de deux fonctions $f(x_1) - \varphi(x)$ tombe au-dessous de toute limite quand x et x_1 croissent indéfiniment, $f(x)$ et $\varphi(x)$ ont chacune une limite, et ces limites sont égales.*

On ne suppose aucune relation entre x et x_1. Qu'elles soient égales ou inégales, $f(x_1) - f(x)$ doit avoir pour limite zéro. Ecrivons

$$f(x_1) - \varphi(x) = f(x_1) - f(x) + [f(x) - \varphi(x)]$$
$$f(x_1) - \varphi(x) = \varphi(x_1) - \varphi(x) + [f(x_1) - \varphi(x_1)]$$

Il s'ensuit que $f(x)$ et $\varphi(x)$ ont chacun une limite, et de lim $(f(x) - \varphi(x) = o$ résulte que ces limites sont égales.

Nous en avons fini avec le principe général de convergence. La discussion du principe de divergence exige maintenant que nous considérions la marche finale des fonctions qui n'ont pas de limite. Il intervient là, au lieu d'une limite, deux valeurs limites que j'ai appelées limites d'indétermination, et dont il est question dans l'article suivant.

68. — **Limites d'indétermination.** — La fonction $f(x)$ ne peut évidemment, quand x croît indéfiniment, que posséder une limite ou n'en point posséder.

Dans le second cas, $f(x)$ peut ou bien prendre des valeurs qui, en grandeur, soit dans le sens $> o$, soit dans le sens $< o$, soit dans les deux, laissent en arrière toutes limites, ou bien $f(x)$ devra nécessairement rester comprise entre des limites déterminées, et puisqu'elle ne doit pas avoir de limite, oscillera indéfiniment.

Examinons de plus près le dernier cas. On sent que, de quelque manière que se fasse cette oscillation, elle doit, suivant les vues de l'Idéaliste, finir par se produire entre des limites déterminées Des éclaircissements précis sur une pareille marche finale de fonction sont fournis par la proposition suivante relative aux limites d'indétermination, par sa démonstration et les considérations qui s'y rattachent.

V. — *Si une fonction $f(x)$, x croissant indéfiniment, reste comprise entre des bornes finies, il existe deux quantités fixes U et O, entre lesquelles $f(x)$ oscille à partir de valeurs suffisamment grandes de x ; ou bien elle en approche autant qu'on veut, ou bien elle finit par les dépasser d'aussi peu qu'on veut ; ou bien enfin, sans les dépasser, elle leur est égale un nombre indéfini de fois.*

Ces quantités U et O, nous les nommerons *limites d'indétermination* de la fonction $f(x)$.

Tout d'abord il doit y avoir pour chaque valeur de x une plus petite quantité $o(x)$, que ne dépasse plus $f(x+\xi)$, si grand qu'on imagine ξ, puisqu'on suppose que $f(x)$ ne peut pas croître indéfiniment. (Art. 64, I et compléments). La quantité $o(x)$, quand x augmente, ne croît pas, parce que c'est la plus petite que $f(x)$ ne dépasse pas. Mais alors comme elle ne peut tomber au-dessous de toute limite, il existe nécessairement (art. 67) une quantité déterminée O, telle que $O - o(x+\xi)$ puisse tomber au-dessous de toute limite pour x suffisamment grand. Nous nommerons O la limite supérieure d'indétermination. — On arrivera de même à l'existence de la limite inférieure U d'indétermination. — *C. Q. F. D.*

A cette démonstration de l'existence des limites d'indétermination O et U je joins quelques éclaircissements et quelques exemples.

1. — Comme nous le montrera un examen plus approfondi à propos des enveloppes d'indétermination, il y a tout d'abord au point de vue de la fonction $o(x)$ deux cas à remarquer. Ou bien $f(x)$, pour x suffisamment grand, admet dans l'intervalle (x, ∞) une limite supérieure, qui lorsque x croît indéfiniment reste invariable dans ce cas $o(x)$ est constante et égale à O, qui est alors la limite supérieure d'indétermination de $f(x)$. Ou bien la limite supérieure de $f(x)$ dans l'intervalle (x, ∞) diminue quand x augmente : C'est le cas où $o(x)$ est variable et ne fait que diminuer jusqu'à O.

Pour parler comme l'Idéaliste, la fonction $f(x)$ oscille à l'infini entre les valeurs O et U, auxquelles elle redevient sans cesse égale.

2. — On a coutume de dire d'une fonction dont les limites d'indétermination O et U diffèrent (car elles peuvent aussi être égales) qu'elle est indéterminée pour $x = \infty$. Lorsqu'elle est continue, cela signifie qu'elle prend un nombre illimité de fois toute valeur de l'intervalle $(U \pm \varepsilon, O \pm \varepsilon_1)$, où ε et ε_1, qui peuvent s'annuler, sont d'autant plus petits que les arguments sont pris plus grands. On peut exprimer cela analytiquement :

$$\lim f(x) = \frac{O+U}{2} + j\,\frac{O-U}{2}$$

où j représente toute valeur de l'intervalle $(-1, +1)$. C'est dans le signe qu'est renfermée l'indétermination de la limite.

Si au contraire $f(x)$ n'est pas continue, elle peut ne pas prendre toute valeur comprise entre O et U, et alors j ne désignera que $+1$ et -1, ou bien ces deux valeurs ainsi qu'un nombre convenable de valeurs intermédiaires.

Il n'est peut-être pas superflu de faire remarquer la différence qu'il y a entre le signe j et le signe ordinaire Θ, qui,

chez Cauchy, désigne d'habitude une valeur inconnue entre zéro et 1, par exemple, dans les considérations sur le reste, où une valeur comprise entre x et $x + h$ est désigné par $x + \Theta h$, $o < \Theta < 1$. Cette ignorance *subjective* marquée par Θ, d'une valeur déterminée appartenant à un intervalle connu, est naturellement tout-à-fait distincte de l'indétermination *objective* représentée par j.

3° Pour donner quelques exemples de limites d'indétermination, soit d'abord $f(x) = \cos \alpha x$. $f(x)$ oscillera entre -1 et $+1$, prendra ces valeurs un nombre illimité de fois, mais n'ira pas au-delà. Si on pose ensuite $f(x) = e^{-\frac{1}{x}} \cos \alpha x$. et $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \cos \alpha x$, les limites d'indétermination de ces fonctions seront les mêmes, seulement la première n'atteindra jamais les valeurs -1, $+1$, la deuxième les dépassera toujours. Dans les fonctions qui ont -1 et $+1$ pour limite d'indétermination, la limite est j. Ainsi

$$\lim e^{\frac{1}{x}} \cos x = \frac{1-1}{2} + j\,\frac{1+1}{2} = j.$$

Je citerai ensuite des fonctions qui ne varient que par sauts brusques. Nous pouvons en définir de telles que $f(x)$ pour $n \leqq x < n + 1$ (n étant un nombre entier) ait une valeur constante $\varphi(n)$, où φ est une fonction donnée. Posons, par exemple, $\varphi(n) = \sin n \frac{\pi}{m}$, $f(x)$ aura encore les limites d'indétermination $+1$, -1, si m est pair. Au contraire, si m est impair, les limites d'indétermination sont $\pm\left(1 - \sin \frac{\pi}{2m}\right)$. — Lorsque on pose $\varphi(n) = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, c'est-à-dire $\varphi(n) =$ la somme des n premiers termes d'une série, les limites d'indétermination s'introduisent dans la théorie des séries, où elles rendent des services tout particuliers.

Géométriquement on représentera les limites d'indétermination par deux parallèles à o x, d'ordonnées U et O. La fonction $f(x)$ qui, si elle est représentable, est une ligne s'étendant à l'∞ dans le sens de $x > o$, peut d'abord avoir une variation quelconque; elle finit par se renfermer de plus en plus dans la bande comprise entre U et O, si elle ne s'y trouve pas tout d'abord.

69. — **Principe général de divergence.** — Nous pouvons maintenant démontrer géométriquement le principe général de divergence qui s'énonce ainsi :

VI. — *Si la différence* $f(x_1) - f(x)$ *ne reste pas au-dessous d'une quantité aussi petite qu'on veut pour toutes les valeurs* x *et* x_1 *supérieures à une valeur de grandeur suffisante,* $f(x)$ *n'a pas de limite déterminée.*

Pour le démontrer, examinons tous les cas possibles dans la marche finale des fonctions. Quand $f(x)$ croît ou décroît au-delà de toute limite, $f(x_1) - f(x)$ peut toujours être aussi grand qu'on veut. — Si en second lieu $f(x)$ varie entre des bornes finies, et que les limites d'indéterminations O et U qui alors existent toujours soient différentes, $f(x)$ finissant par être aussi voisines qu'on veut de O et U, la différence $f(x_1) - f(x), x_1 > x$, peut devenir d'autant plus voisine de la différence $O - U$ que x est plus grand.

Enfin supposons O et U égales entre elles. Si $o(x)$ et $u(x)$ désignent les limites supérieure et inférieure de $f(x)$ dans l'intervalle (x, ∞), on a dans ce cas.

$$lim = o(x) = lim\ u(x) = O = U$$

Mais puisqu'on a toujours $o(x) > f(x) > u(x)$, quand $O = U$, la différence $f(x_1) - f(x)$ doit avoir la limite zéro, pour x *et* x_1 infinis.

Il y a ainsi 3 cas possibles :

1° La fonction $f(x)$ ne varie pas entre des bornes finies déterminées.

2° Elle varie entre des bornes finies déterminées, mais ses limites d'indétermination sont différentes.

3° Elles sont égales entre elles.

Dans le 3me cas seulement, d'après ce qui précède, la limite de $f(x_1) - f(x)$ est nulle, de quelque façon que x et x_1 croissent indéfiniment. Si $f(x_1) - f(x)$ se comporte autrement, on ne sera pas dans le 3me cas $f(x)$ aura alors des limites d'indétermination différentes O et U, ou bien, en général, elle ne variera pas entre des bornes finies ; et dans ces deux cas, le processus infini représenté par $f(x)$ est appelé divergent.

Par là le principe général de divergence est mis en évidence et la connexion entre la marche finale des fonctions et celle de la différence $f(x_1) - f(x)$ se trouve établie en toute généralité.

Nous avons été conduit par cette démonstration à des considérations générales sur la marche des fonctions à l'infini, que nous ne pouvons pas encore arrêter là. Les limites d'indétermination sont déjà des points fixes parmi la multiplicité que présente la marche de la fonction. Mais il suffit de pénétrer un peu plus avant dans les possibilités qu'embrasse cette multiplicité pour découvrir encore des *lignes* fixes qui accompagnent à l'infini toute variation, si oscillante et si accidentelle

qu'elle soit ; cela permet à maintes études analytiques sur la convergence de faire abstraction des oscillations et leur conserve l'avantage de n'avoir affaire qu'à des fonctions variant dans un sens unique. Les lignes fixes qui sont propres à toute variation illimitée, je les nomme *enveloppes d'indétermination.* En voici la description et la théorie.

70. — Théorie des enveloppes d'indétermination. — Nous ne soumettons actuellement la marche des fonctions à aucune restriction : $f(x)$ peut rester finie ou dépasser toute borne. Tous les cas possibles que peut présenter sa marche sont de trois sortes :

1° Ou bien $f(x)$ atteint, si x croît à partir d'une valeur suffisamment grande x, des valeurs revenant constamment qui sont supérieures à toutes les précédentes depuis x. L'Idéaliste dirait que, x étant supposé $> \times$, $f(x)$ ne prend que pour $x = \infty$ sa valeur finie la plus grande possible ou sa valeur infinie. C'est là la première espèce de variation des fonctions.

Où bien $f(x)$, quand x croît, prend sans cesse des valeurs qui ne sont dépassées par aucune valeur suivante. — Cela fournit les deux autres espèces de variations de fonctions :

2° $f(x)$ prend sans cesse, x croissant, des valeurs qui ne seront jamais plus atteintes.

3° $f(x)$ atteint sans cesse, à partir d'une valeur X de x une certaine valeur qui, pour de plus grandes valeurs de l'argument, sera toujours atteinte mais non pas dépassée.

Ces distributions permettent de resserrer en général la variation illimitée des fonctions entre des fonctions ne présentant pas d'alternative de croissance ou de décroissance.

1. Dans le premier cas, faisons croître x à partir d'une valeur X suffisamment grande et construisons une fonction toujours croissante $O(x)$, comme il suit :

Soit d'abord X_1 la 1re valeur de $x < X$, pour laquelle $f(x)$ n'est pas moindre que pour une valeur précédente quelconque de x ($X \leqq x < X_1$). Dans l'intervalle $X \ldots X_1$, soit $O(x) = f(x)$

Soit ensuite $O(x) = f(x)$ pour toutes les valeurs x (à partir de X_1) pour lesquelles $f(x)$ est plus grande que pour toute valeur antérieure de x. Pour les autres valeurs x, $O(x)$ est toujours égal à la dernière valeur $O(x)$ qui était égale à $f(x)$.

2. Si $f(x)$, x croissant, prend sans cesse des valeurs qui ne seront plus atteintes, soit X la 1re de ces valeurs. Dans ce cas, définissons une fonction $O(x)$ n'augmentant jamais, telle que $O(x) = f(x)$ pour toutes les valeurs qui rendent $f(x)$ plus grand qu'il ne sera désormais. Pour les autres valeurs de

$x > X$, soit $O(x)$ égale à la 1re valeur suivante de $f(x)$, qui sera égale à $O(x)$.

3. Si $f(x)$, à partir d'une valeur X de x, prend sans cesse une valeur qui sera de nouveau toujours atteinte, mais jamais dépassée, soit $O(x)$ égale à cette valeur.

Dans la construction que je viens de décrire, j'ai en vue de mettre hors de doute de la manière la plus rapide et la plus générale l'existence de pareilles lignes renfermant à l'infini tout processus illimité. Mais il existe évidemment des fonctions en nombre infini variant dans un sens unique, qui se comportent exactement de la même manière à l'égard de la marche finale de $f(x)$. Le point essentiel doit être maintenant placé dans cette manière de se comporter, et la nature des enveloppes d'indétermination importe peu pourvu qu'elles fournissent les mêmes résultats que celles décrites plus haut. Déterminons donc le concept des enveloppes d'indétermination par la proposition suivante :

VII. — *Soit donné une fonction quelconque* $f(x)$ *d'un argument* x *que nous faisons croître indéfiniment, il existe alors toujours deux fonctions* $O(x)$ *et* $U(x)$ *qui possèdent les propriétés suivantes :*

1. *Chacune de ces fonctions varie dans un sens unique mais peut aussi être constante.*

2. x *croissant sans limite,* $O(x) - f(x)$ *s'annule un nombre illimité de fois aussi bien que* $f(x) - U(x)$.

3. *On a toujours* $O(x) \geqq f(x) \geqq U(x)$, *mais dans le seul cas où* $f(x)$ *elle-même varie dans un sens unique* $O(x) = f(x) = U(x)$.

4. *Lorsque les fonctions* $O(x)$ *et* $U(x)$ *ont des limites, ce sont les limites d'indétermination* O *et* U *de* $f(x)$.

Toute fonction possédant les 4 propriétés précédentes doit s'appeler enveloppe d'indétermination. La fonction $f(x)$ oscille entre elles. Par enveloppe on entend ordinairement, au sens de Monge, des figures imaginées autrement que nous venons d'indiquer. Toutefois on me passera cette dénomination à cause du caractère enveloppant des fonctions $O(x)$ et $U(x)$.

Mon concept des enveloppes d'indétermination va déjà nous servir pour décrire rapidement la marche des fonctions. En effet,

1. Les enveloppes peuvent, toutes deux dans le sens $> o$ ou toutes deux dans le sens $< o$, ou l'une dans le sens $> o$, l'autre dans le sens $< o$, dépasser toutes bornes.

2. L'une peut dépasser toute borne, $> o$ ou $< o$, l'autre avoir une limite.

3. Elles peuvent avoir chacune une limite.

4. Elles peuvent être identiques l'une à l'autre et à la fonction $f(x)$, quand celle-ci varie dans un sens unique.

5. Leurs limites peuvent être égales.

Ce sont là des distinctions très-générales. On peut ensuite se demander si les fonctions approchent de leurs limites en croissant, en décroissant ou en restant constantes.

On peut compter d'après cela 24 espèces de marches de fonction, en comptant pour un le cas où $O(x)$ et $U(x)$ ont la même limite et celui où la variation de $f(x)$ est à sens unique. Représentons par a, d, c les mots augmentant, diminuant, constant entre des limites finies, et par $+\infty$, $-\infty$ les expressions au-delà de toute borne positive, de toute borne négative. Voici les 24 cas :

	$O(x)$	$U(x)$	
	$+\infty$	$-\infty$	1
	$-\infty$	$-\infty$	1
	$+\infty$	$-\infty$	1
	$+\infty$	$a\ d\ c$	3
	$a\ d\ c$	$-\infty$	3
$O > U$	$a\ d\ c$	$a\ d\ c$	9
$O = U$	$a\ d\ c$	$a\ d\ c$	5
	$O(x) =$	$U(x) = f(x)$	1
			24

Pour l'application il suffira d'avoir présente à l'esprit la distinction antérieure en 5 cas, et ces 24 serviront à compléter l'image.

Je donne encore à la fin de cet article quelques exemples d'envoloppes d'indétermination. Considérons les fonctions $e^{\frac{1}{x}} \cos x$, $e^{\frac{1}{x}} \cos x$. Pour la première on peut poser $O(x) = e^{\frac{1}{x}}$ $U(x) = -e^{\frac{1}{x}}$.

Pour la deuxième, $O(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ $U(x) = -e^{-\frac{1}{x}}$

Pour la troisième, $O(x) = O = 1$; $U(x) = U = 1$.

Pour $e^{\pm\frac{1}{2}} \cos x$, on a

$$O(x) - f(x) = e^{\pm\frac{1}{x}} (1 - \cos x),$$

quantité qui s'évanouit un nombre illimité de fois, mais n'est jamais négative, de sorte que les conditions de la proposition VII sont remplies.

Les enveloppes d'indétermination de $\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} \cos x$ sont $\pm\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$ et les limites d'indétermination sont $O = U = o$.

71. — Marche finale à sens unique des fonctions et pantachie infinitaire. — Le cas d'une fonction $f(x)$ variant elle-même dans un sens unique dans lequel on a $O(x) = U(x) = f(x)$, est très important, car à cette variation à sens unique se rattache tout ce qui a trait à la croissance et à la décroissance relative des fonctions.

Une fonction à sens unique peut dépasser toute borne $> o$ ou $< o$, ou bien elle peut avoir une limite finie. Dans le 1er cas, il suffit d'étudier la marche *croissante* de la fonction ; dans le second, on peut supposer que zéro est la limite, car il suffira, si la limite n'est pas nulle, de la retrancher de la fonction pour être conduit à la limite zéro. Mais les fonctions à sens unique qui ont pour limite zéro pouvant être considérées comme inverses de celles qui croissent indéfiniment, nous pouvons nous borner ici à considérer les dernières.

Il s'agit donc de fonctions qui, pour parler comme l'Idéaliste, deviennent infinies en ne faisant jamais que croître. La théorie de la vitesse relative de cette croissance est l'objet du calcul infinitaire que nous développerons plus tard. Je ne donnerai ici de cette théorie que les éléments nécessaires pour les concepts fondamentaux de la théorie générale des fonctions dont ce chapitre termine l'étude.

Représentons-nous une série de fonctions croissant constamment et indéfiniment et considérons-en deux quelconques, $f(x)$ et $\varphi(x)$. On dira que $f(x)$ croît plus rapidement que $\varphi(x)$, si à partir d'une valeur X suffisamment grande de x, $f(x) > \varphi x$, — et si la différence $f(x) \varphi(x)$ augmente avec x. Les applications donnent à cet accroissement diversement rapide des fonctions un intérêt particulier si la fonction $f(x)$ qui croît le

plus vite présente une supériorité de vitesse telle que le quotient $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ croisse également sans limite.

Le langage de l'Empiriste convient si peu à la nature propre du sujet qui nous occupe, il serait si traînant, qu'ici au moins nous nous promettrons d'appliquer la terminologie de l'Idéaliste. Nous savons très bien maintenant ce qu'il nous faut entendre par là, et n'est-ce pas un avantage bien naturel de notre étude des principes, qu'elle donne, comme toute explication fondamentale, libre carrière non-seulement à l'idée mais à l'expression.

Suivant que le quotient $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ aura la limite infinie ou nulle, nous dirons : *$f(x)$ a un infini plus grand ou plus petit que $\varphi(x)$* ; et si ce quotient a une limite différente de zéro et de l'infini, $f(x)$ et $\varphi(x)$ *ont un infini égal.* Nous écrirons.

$f(x)\ inf. > \varphi(x)$, $f(x)\ inf. < \varphi$, $f(x)\ inf = \varphi(x)$, pour dire :

$$lim\ \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \infty,\ lim\ \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0,\ 0 < lim\ \frac{f(x)}{\varphi(x)} < \infty,$$

ou bien, $f(x)$ a un infini supérieur, inférieur, égal à celui de $\varphi(x)$.

J'appelle les relations $f(x)\ inf \gtreqless \varphi(x)$ égalités ou inégalités *infinitaires.* Elles comportent des opérations multiples qui sont l'objet d'une espèce propre de calcul, du *calcul infinitaire.* Je me contente de mentionner ici ce fait immédiat que des relations.

$f(x)\ inf > f_1(x)\ \varphi(x)\ inf > \varphi_1(x)$. $\lambda(x)\ inf = \lambda_1(x)$, on conclut également celles-ci :

$$f(x)\ \varphi(x)\ inf > f_1(x)\ \varphi_1(x),\ f(x)\ \lambda(x)^{\pm 1}\ inf. > f_1(x)\lambda_1(x)^{\pm 1},$$

et, suivant que $f(x)\ inf > \lambda(x)$, ou $inf \leqq \lambda(x)$,

$$f(x) \pm \lambda(x)\ inf\ f_1(x) \pm \lambda_1(x).$$

J'observe encore en passant que les mêmes désignations et formules s'appliquent aux fonctions qui décroissent indéfiniment jusqu'à zéro. Pour exprimer les relations $lim\ \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$ ou $f(x)\ inf < \varphi(x)$, on dira *$f(x)$ a un zéro plus petit que $\varphi(x)$.*

La grandeur des infinis conduit évidemment à un principe

d'ordination pour les fonctions croissant constamment. On peut les ranger en une série

$$\ldots f_0(x) \ldots f_1(x) \ldots f_2(x), \ldots$$

telles que chacune ait un infini plus grand que toutes les précédentes et que toute fonction entrant dans la suite y ait une place déterminée.

Si on pose $Log\, x = lx$, $llx = l_2\, x$, $lllx = l_3\, x$, etc., la série suivante est de ce genre :

$$\ldots (l_3 x)^{\mu} \ldots (l_2 x)^{\mu} \ldots (l_1 x)^{\mu} \ldots x^{\mu} \ldots e^{\mu x^{(1)}} \ldots e^{\mu e^{\mu 1 x^{\varkappa}}} \ldots \text{J.}$$

Le quotient de chacune de ces fonctions par une de celles qui précèdent à la lim. ∞

Dans ces fonctions et dans de plus complexes, qui appartiennent au domaine analytique d'opération déduit du concept de puissance, on trouve les limites de quotients en les ramenant à l'un des quotients $\frac{x}{l\,x}$ où $\frac{e^x}{x}$, qui peuvent également se ramener l'un à l'autre par substitution. Si on donne pour base au concept de l'exponentielle e^x la série $\Sigma \frac{x^n}{n!}$, $\frac{e^x}{x}$ est le quotient fondamental et sa limite ou celle du quotient général $\frac{e^{\mu x^k}}{x^M}$ est facile à déterminer. Ce quotient peut s'écrire sous forme de série.

$$\Sigma \frac{\mu^n x^{\varkappa_n}}{n\,!} - M \quad .$$

Puisque maintenant $\varkappa n - M$, si grand que soit M et si petit que soit $\varkappa$, finit par devenir > 0, quand n croît, la limite cherchée est ∞. Soit, par exemple, à réduire le quotient :

$$e^{\mu e^{\mu_1 x^k}} \cdot e^{-mx^k} \quad :$$

Le log est

$$mx^k \left\{ \frac{\mu}{m} \frac{e^{\mu x^{\varkappa}}}{x^k} - 1 \right\},$$

et devient infini avec x d'après ce qui précède.

Dans la série précédente J les paramètres $\mu, \mu_1, \ldots x$ désignent des nombres positifs quelconques. Chacune des fonctions qui s'y trouvent désignées représente donc une suite infinie ou une pantachie complète de fonctions isolées. Mais la série J peut être encore enrichie de fonctions de bien des manières. Par exemple, voici un moyen : Soient deux fonctions u_1, u_2 satisfaisant à l'inégalité infinitaire $u_1 \; inf \prec u_2$, et soit $n_2 = u_1 v$ on a ;

$$u_1 \, inf < u_1 v^{\mu} (lv)^{m_1} (l_2 v)^{m_2} \ldots (l_n v)^{m_n} \, inf < u_2 ,$$

où $u_1 \, inf < 1$, et où les m représentent des nombres positifs quelconques. Il est facile de justifier successivement ces formules. De cette façon on peut intercaler entre deux fonctions quelconques diverses suites d'autres fonctions.

Un autre procédé pour insérer des fonctions dans la série J consiste à mettre des fonctions à la place des paramètres. Ainsi pour $o < \mu < 1$; m et $M > o$, on a

$$(lx)^{M} \, inf \prec (xl)^{(lx)^{\mu}} \, inf < x^{m} .$$

Pour peu qu'on réfléchisse à ces expressions analytiques, on voit qu'à l'aide de ces deux procédés d'insertion, la série J représente un ensemble qui peut dépasser de beaucoup n'importe quel autre.

Tout bien considéré, je crois en effet que la pantachie complète des quantités linéaires n'est pas égale en puissance (au sens de M. Cantor) à l'ensemble des infinis. La *pantachie infinitaire*, comme cette dernière succession doit s'appeler, est un ensemble complètement déterminé. Toutes les fonctions qui, substituées à $f_1(x)$ dans l'égalité infinitaire $f(x) \; inf = f_1(x)$, y satisfont, forment avec $f(x)$ une quantité infinitaire, un *point infinitaire*, et ces points, si nombreux qu'on les imagine, forment une suite de séries complètement déterminée. Sans doute une pareille définition n'assigne pas tout de suite aux points infinitaires un lieu géométriquement représentable, comme aux quantités de la pantachie complète. Toutefois cela tient à ce que la pantachie complète des quantités correspond immédiatement à la représentation des quantités, tandis que la pantachie complète infinitaire a pour fondement des représentations moins simples. Mais à l'égard de l'essence même de la pantachie complète des quantités, le lieu qu'occupent les individus de la pantachie est tout-à-fait accessoire, car il peut être diversement modifié par la correspondance adoptée pour la fonction. La pantachie infinitaire a de commun avec l'autre cette propriété essentielle que ses points ne peuvent être rangés en séries que d'une manière.

Nous pouvons concevoir la pantachie infinitaire à la manière de l'Empiriste et de l'Idéaliste. L'Empiriste y voit comme nous l'avons indiqué, une masse d'individus qu'on doit rendre de plus en plus compacte. Pour l'Idéaliste c'est un *continu infinitaire*, analogue au continu des nombres, qu'on peut concevoir de même, quoique moins simplement, comme un ensemble de points sur une ligne. Il faut poser la condition que pour deux individus quelconques $f(x)$ et $f_1(x)$, du faisceau de courbes ascendantes, la différence $f(x) - f_1(x)$, lorsque x augmente, ne change plus de signe. Considérons alors les points d'intersection d'une perpendiculaire à l'axe des x avec les courbes ascendantes. A cause de la condition précédente, et pour que les logarithmes supérieurs partent de l'axe des x, nous devons reculer cette droite à l'infini :

Les points de la ligne rejetée à l'infini sont donc pour l'Idéaliste l'équivalent géométrique de la pantachie infinitaire.

Il serait difficile de comparer, à l'égard de leur puissance relative, au sens de M. Cantor, la pantachie infinitaire avec la pantachie complète. Dans tous les cas, les deux ensembles sont évidemment quelque chose de tout-à-fait différent. La correspondance élément à élément qui a un sens très clair dans les ensembles dénombrables est ici inconcevable. Déjà selon les apparences, la pantachie infinitaire, pour l'Idéaliste comme pour l'Empiriste, est beaucoup plus complexe que la pantachie complète. Des fonctions contenant un nombre illimité de paramètres, dont chacun désigne une pantachie complète, peuvent être insérées entre deux individus quelconques de la pantachie, puis de nouveau entre deux individus quelconques de la nouvelle suite, etc.

Toutefois plus que de pareilles suppositions, les résultats auxquels je suis parvenu dans mes « Paradoxes du calcul infinitaire » me conduisent à considérer comme de nature différente les deux pantachies. On découvre là une différence essentielle entre la marche vers un infini particulier de la pantachie infinitaire et une valeur particulière de la pantachie complète. Nous pouvons exprimer ainsi la proposition : Vers une valeur particulière x d'une pantachie complète tendent, en aussi grand nombre qu'on veut, des suites de valeurs dénombrables telles que les différences entre x et les valeurs tendant vers x des diverses suites tombent au-dessous de toute limite. Au contraire, étant donné un infini $f(x)$, il n'y a pas de suite de fonctions $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$,... satisfaisant, par exemple, aux relations

$$\psi_1(x) \; inf < \psi_2(x) \; inf < \ldots . \; inf < f(x)$$

telles qu'on ne pourrait donner d'autres suites $\varphi_1 x()$ $inf < \varphi_2$ (x) inf $<\ldots\ldots$ $inf <$ $f(x)$, dont tous les individus eussent un infini plus grand que les $\psi(x)$.

C'est là une différence de nature qui semble ne permettre aucune correspondance élément à élément entre la suite infinitaire et la suite des quantités.

M. Cautor paraît supposer qu'il n'existe d'ensembles que de deux puissances, à savoir : de la puissance des nombres entiers et de celle de tous les nombres ; et il faut convenir qu'il y a beaucoup de vraisemblance qu'il en soit ainsi pour les quantités linéaires. Mais quand on va au-delà, la chose paraît être moins sûre. Ainsi, comme je viens de l'exposer, je suis fermement convaincu, quoique ne disposant pas d'une véritable démonstration, que la pantachie infinitaire est d'une puissance supérieure à celle de tous les nombres.

Considérations finales
sur la métaphysique des concepts analytiques fondamentaux

J'ai déjà dit qu'en analyse le concept de limite, plus exactement la question de l'existence de la limite, joue un rôle analogue à celui que joue en géométrie le fameux axiome d'Euclide, et il est utile d'insister un peu sur cette comparaison.

En géométrie, c'est-à-dire dans la science des rapports existant entre les positions de points, entre lignes, surfaces et corps, — pour établir rigoureusement les propositions et les théories, on est finalement ramené à certaines propositions fondamentales intuitives, qu'on nomme les axiomes de la géométrie. Ces axiomes sont bien des vérités d'intuition, c'est-à-dire dont la rigueur ne soulèvera pas le moindre doute dans un esprit naïf ; mais ils ne possèdent nullement la lumineuse certitude de perceptions immédiates, et, quand on y regarde de plus près, il est impossible, ou au moins difficile de les relier sans lacune à de telles perceptions par un enchaînement satisfaisant de représentations, en un mot de les démontrer. Ils sont d'ailleurs de diverse nature. Ainsi l'axiome « la ligne droite est le plus court chemin entre deux points » n'est pas un axiome proprement géométrique. L'examen montre que le concept sur lequel il est fondé, celui de la possibilité de rectifier, est analytique, parce qu'il cache un passage à la limite. Si on veut voir un axiome dans l'existence de la limite, la proposition sur la longueur minima de la ligne de fonction de deux points en est un également. Sinon cette proposition se démontre. L'axiome propre de la géométrie pure est celui des parallèles, équivalent à la proposition que la somme des angles d'un triangle vaut deux droits : vérité fondamentale, pour laquelle le chemin reliant la certitude de l'affirmation générale à celles des perceptions immédiates était longue et difficile à trouver.

Le sort de cet axiome d'Euclide est connu. La connaissance de ce fait qu'il n'est pas une *Conditio sine qua non* pour une géométrie systématique, en faisait une vérité d'expérience, dont Riemann a dévoilé la vraie signification par son

analyse du concept de l'espace. Il partait ainsi d'un axiome qu'ensuite M. de Helmoltz a ramené à notre représentation du mouvement relatif. Quelques résultats utiles et surprenants que l'analyse et la géométrie puissent encore tirer de cette source récemment découverte, il semble qu'elle se trouve déjà remontée jusqu'à son point de départ dans le monde de la perception, que, à l'aide des recherches mentionnées, le concept de l'espace ait été analysé dans ses traits essentiels suivant la méthode de l'Empiriste, et que par suite, l'axiome fondamental de la géométrie se trouve expliqué par la même méthode. En tous cas, nous faisons pour le moment cette hypothèse.

Voici donc ce qu'il faut dire des principes fondamentaux de la géométrie. Euclide, avec son axiome, a frappé juste. D'abord posé comme principe non démontré, il fut reconnu récemment comme vérité d'expérience et finalement fut rattaché par une dépendance qu'on n'avait pas soupçonnée au concept d'espace. Le problème était donc extrêmement vieux, mais la solution en était très difficile. Les recherches sur cet axiome constituent en géométrie comme un épisode, qui, bien que d'une très-grande importance, n'a pas sur cette science d'autre effet que de lui fournir ainsi qu'à l'analyse, de nouveaux sujets d'étude, sans sortir pourtant de l'ancien concept de grandeur.

En analyse, les choses se comportent autrement. Cette science est toute récente et ceux qui l'ont créée ont tout de suite tourné leurs efforts vers les problèmes les plus élevés. Semblable à un conquérant impétueux, l'analyse a porté au loin sa bannière victorieuse, sans se soucier d'assurer ses conquêtes. Mais la tendance propre à la deuxième moitié de ce siècle de parvenir à une vue plus profonde des fondements de nos connaissances a gagné aussi les analystes. Lorsque grâce à Gauss qui le premier osa inviter à donner des fondements vraiment solides aux vérités mathématiques, puis grâce aux travaux de Cauchy, d'Abel et de Dirichlet, on eut appris à connaitre la jouissance ineffable que donne une mathématiqne rigoureuse, on sentit un besoin impérieux de posséder une semblable mathématique. L'illusion que cachaient maintes conclusions tout récemment encore admises sans conteste devint évidente, on trouva des résultats d'opération contredisant les vues les plus généralement adoptées : l'intérêt se tourna alors du côté de la métaphysique des concepts fondamentaux. Aussi les travaux actuels donnent au lecteur une tout autre impression que ceux du siècle dernier ou du commencement de ce siècle. C'est pourquoi je suis convaincu que l'analyse d'aujourd'hui tant qu'elle ne fait que combiner, à l'aide de nombres,

des quantités connues, déterminées ou laissées indéterminées, comme cela a lieu en algèbre, dans la théorie propre des fonctions, dans les intégrales définies, etc., bref, tant que le dualisme du concept de grandeur n'intervient pas, notre analyse, dis-je, ne satisfera pas moins les mathématiciens des siècles futurs que ceux d'aujourd'hui. On ne pouvait en dire autant jusqu'ici, comme j'y ai plusieurs fois insisté, d'autres théories telles que le calcul différentiel et diverses questions de la théorie générale des fonctions, — et ce sont ces domaines que j'oppose à la géométrie. Là, l'axiome correspondant à celui d'Euclide et dont l'établissement résout l'énigme aux mille formes, n'était pas connu. Eh bien, mon Idéaliste et mon Empiriste sont d'accord sur ce fait que le contenu du concept de limite fournit ce principe d'ordination, manquant jusqu'ici, des concepts analytiques fondamentaux. Mais cette signification lui a jusqu'ici été si peu assignée, que l'Idéaliste n'a assurément rien fait de superflu en montrant que l'existence de la limite doit avant tout être démontrée.

Le concept de limite est à ce dualisme qui dissipe toute obscurité dans le même rapport que l'axiome d'Euclide au concept d'espace, avec cette différence que dans les fondements de l'analyse la difficulté consistait à trouver l'axiome essentiel dont la solution donnait tout le reste, sauf à le retrouver dans les cas particuliers, tandis qu'en géométrie on connaissait depuis longtemps l'axiome essentiel, c'est l'analyse du concept d'espace, la clef de l'axiome, qui a été la grande difficulté. Et, en opposition avec l'axiome géométrique, ce dualisme mis au jour par le concept de limite reste à son tour un guide profond dans l'étude des fondements de l'analyse. Son influence se fait sentir dans toutes les parties du principe de convergence et de divergence, et en outre, partout où des dépendances anorthoïdes sont à considérer. Au contraire, les groupes de représentations élémentaires du concept d'espace peuvent être jugés à la manière de l'Idéaliste et de l'Empiriste, sans que ce dualisme en géométrie ait joué aucun rôle, du moins jusqu'ici.

Notre étude des concepts analytiques fondamentaux ne répond pas à toutes les questions que suscite le phénomène de l'analyse avec ses relations étonnantes, exprimées par des symboles dépourvus de sens en eux-mêmes.

C'est tout d'abord l'extension des opérations simples en un nombre quelconque d'éléments, et l'accumulation des opérations qui donne à réfléchir. Car, s'il est possible d'expliquer naturellement par le concept de grandeur des règles comme la multiplication des fractions, qui sont difficiles à motiver par l'arithmétique pure (art. 18), ce concept semble refuser ses

services dès que, par exemple, plus de trois éléments doivent être multipliés l'un par l'autre. On pourrait alors ne voir à l'égalité $x = a_1 \; a_2 \; \ldots\ldots \; a_n$ qu'un sens arithmétique, et c'est ainsi que s'imposerait la conception purement arithmétique de l'analyse. Ce serait une erreur. Il est clair que des opérations arithmétiques d'un ordre quelconque, et quel que soit le nombre des éléments, sont une succession d'opérations élémentaires et n'ont de sens que comme telle. Ainsi le produit $a_1 \; a_2 \; \ldots\ldots \; a_n$, quoique symétrique par rapport à ses facteurs, a pour signification

$$\left[\ldots\ldots\left[\left(a_{r_1} \, . \; a_{r_2}\right) a_{r_3}\right]\ldots\ldots a_{r_n}\right]$$

et c'est un théorème que la suite r_1, r_2, ... r_n peut représenter une permutation quelconque des nombres 1, 2,... n. Chacune des opérations élémentaires peut recevoir pour fondement le concept de grandeur, et il en est de même de toutes les opérations mathématiques, sans exception.

Comme je l'ai observé (art. 18), on n'aura pas toujours présent à l'esprit dans le courant du calcul que les lettres désignent des nombres, les nombres des grandeurs. Au contraire, on effectuera des combinaisons sur les lettres mêmes d'après les règles connues qui se ramènent en dernière analyse au concept de grandeur. Ainsi on peut laisser de côté la représentation de grandeur, si on n'en a pas besoin directement, et penser avec les lettres et les nombres. On pourra même exiger que les conclusions et les démonstrations possèdent une *rigueur arithmétique*, en supprimant les lacunes que doit combler l'imagination géométrique, parce que cette rigueur arithmétique est une garantie des plus sûres de la perfection d'une chaîne de conclusions. Mais cela ne fait pas une différence essentielle dans la conception d'opérations analytiques : il s'agit plutôt simplement d'un langage abrégé et d'une forme de raisonnement présentant le plus haut degré de sûreté.

Les explications précédentes paraîtront presque superflues à l'analyste auquel sont familières les considérations mécaniques et physiques. Les équations de la mécanique renferment, à côté des lettres qui représentent les nombres, des lettres désignant à travers toutes les opérations des quantités d'espèce tout-à-fait définie, de sorte qu'ici la conception purement numérique de quantités sur lesquelles on opère ne saurait être maintenue.

Pendant que l'on *calcule*, par exemple, sur les 9 coordonnées du problème des 3 corps, on ne pense pas constamment à leur

signification mécanique, mais cette signification ne s'en sépare pas, comme cela résulte du principe de l'homogénéité des quantités mécaniques. (Poisson, traité de mécanique, introduction, n° 23.)

Encore une remarque qui s'applique à l'esprit général de l'analyse. Si nous jetons un regard sur son développement historique, elle apparaît comme un organisme créé par le travail intellectuel des siècles, organisme jamais complet, et continuant sans cesse à se développer de telle sorte qu'à chaque degré de développement les théorèmes et théories qui forment ses richesses présentent un enchaînement logique irréprochable. Pendant que l'investigation marche en avant, des voies qu'on suivait avec ardeur finissent par être abandonnées et de nouvelles sont ouvertes. Mais au milieu de ces changements continuels, l'analyse forme à chaque époque un système de propositions et de méthodes où tout se soutient et s'entr'aide, sans qu'il y ait jamais rien de contradictoire. Il se produit là des phénomènes singuliers. Ainsi d'une part le domaine d'opérations relatives aux puissances est né du concept du produit, grâce à l'algorithme ingénieux de Descartes ; — d'autre part, le domaine d'opérations relatives aux fonctions trigonométriques est né et s'est perfectionné. Que pouvaient avoir de commun les deux domaines sous le rapport des concepts ? Et pourtant le symbole imaginaire en les unissant finissait par en faire le domaine d'opérations de la théorie des fonctions complexes. C'est ainsi que, comme par une révélation divine, cette voie si féconde se trouve désignée à la spéculation scientifique, — quand aucun penseur n'aurait pu en soupçonner d'avance les conséquences.

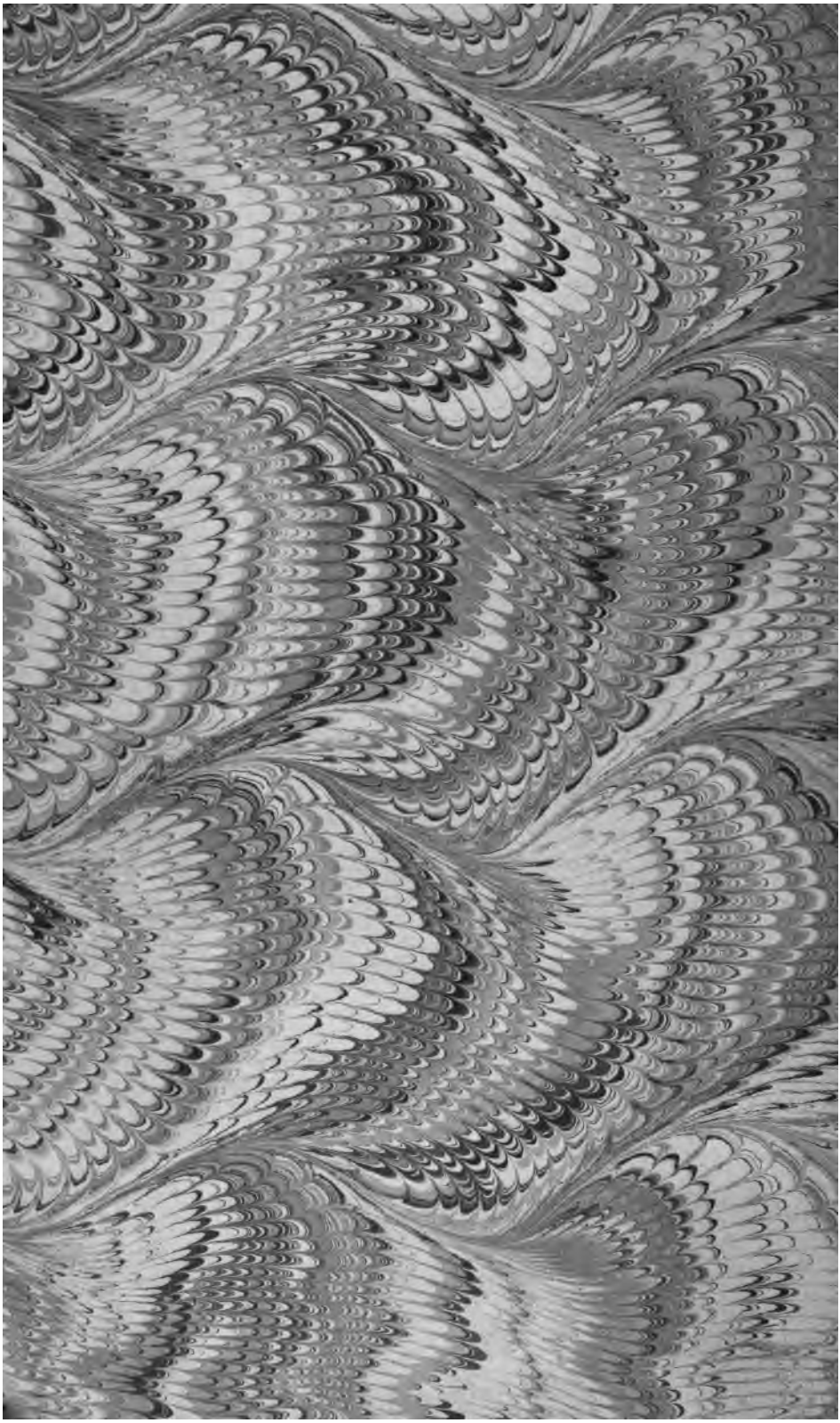
Un aussi remarquable phénomène pourrait susciter cette opinion idéaliste que l'Analyse est une chose préexistante et indépendante de l'existence d'êtres pensants, — qui est découverte et étudiée peu à peu comme une nouvelle partie du monde. On pourrait en conclure qu'une seule analyse est possible, de sorte que si elle était de nouveau à découvrir, elle ne pourrait que réapparaître identique ; — au lieu que, si tout à coup l'humanité oubliait son langage, elle apprendrait bien de nouveau à parler mais peu probablement dans le langage primitif. Mais on peut aussi, au sens empiriste, c'est-à-dire sans admettre la *préexistence* de la mathématique, se convaincre de la nécessité logique de son contenu actuel. Si on songe en effet à la foule des penseurs qui, dans la suite des siècles, ont fouillé le sol mathématique, on comprend qu'ils aient tenté de pénétrer dans toutes les parties accessibles à la pensée, et que les voies les plus fécondes en résultats aient

dû être trouvées. Ce sont les seules que l'on ait poursuivies. Dans une sélection de ce genre l'investigation humaine a dû nécessairement suivre en général la voie la plus fructueuse. C'est ainsi qu'une direction définie lui était tracée.

Ainsi se trouve justifié par l'Analyse tout entière ce mot de l'Empiriste (art. 37, 5) que si les habitants de Mars possèdent une analyse, elle doit être identique à la nôtre dans toutes ses parties essentielles.

TABLE DES MATIÈRES

Préface de la Traduction ..... page 7
Préface de l'auteur ..... » 17
Des concepts de grandeur et de limite ..... » 21
CHAP. I. Des grandeurs ou quantités mathématiques ..... » 31
Les deux Conceptions idéaliste et empiriste de la limite et de la grandeur ..... » 64
— II. Considérations finales sur l'Idéalisme et Empirisme ainsi que le concept de limite ..... » 127
— III. L'Argument ..... » 144
— IV. La Fonction ..... » 170
— V. Marche finale des fonctions ..... » 197



MATH-COMP. SCI. LIB.

QA 331 .D814 1887 C.1
Theorie generale des fonctions
Stanford University Libraries
3 6105 033 197 612

QA3
D81
188

DATE DUE

MAR 23 1993			

STANFORD UNIVERSITY LIBRARIE
STANFORD, CALIFORNIA 94305-600